

**SOUS LE HAUT PATRONAGE DE SA MAJESTÉ LE ROI MOHAMMED VI**



الجمعية المغربية للعلوم الميكانيكية

Société Marocaine des Sciences Mécaniques



**FSAC**

UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA  
FACULTÉ DES SCIENCES AÏN CHOCK

**La Société Marocaine des Sciences Mécaniques**

**et**

**La Faculté des Sciences Aïn Chock de l'Université Hassan II  
de Casablanca**

**Organisent**

**15<sup>ème</sup> CONGRÈS DE MÉCANIQUE**  
**15<sup>th</sup> CONGRESS OF MECHANICS**

**Tome I : Mécanique des Solides**

**24 - 27 Mai 2022, FSAC-Casablanca-Maroc**

**May 24 - 27 2022, FSAC-Casablanca-Morocco**

<https://smsm.org.ma/cmm/>

Sous le Haut Patronage de Sa Majesté le Roi Mohammed VI



الجمعية المغربية للعلوم الميكانيكية  
Société Marocaine des Sciences Mécaniques



UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA  
FACULTÉ DES SCIENCES AÏN CHOCK

ème  
**15** CONGRÈS  
DE MÉCANIQUE

---

Mai 24-27, 2022, Casablanca

---

**Tome I : Mécanique des Solides**

## Comité d'Honneur

<b>Pr. Abdellatif MIRAOUI</b>	Ministre de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche scientifique et de l'Innovation
<b>Pr. Omar FASSI-FEHRI</b>	Secrétaire Perpétuel de l'Académie Hassan II des Sciences et Techniques, Président Fondateur de la Société Marocaine des Sciences Mécaniques
<b>Pr. Mohammed TALBI</b>	Président de l'Université Hassan II de Casablanca
<b>Pr. Omar SADDIQI</b>	Doyen de la Faculté des Sciences Aïn Chock - Casablanca
<b>Pr. Jaâfar KHALID NACIRI</b>	Ex Président de la Société Marocaine des Sciences Mécaniques
<b>Pr. Nouredine DAMIL</b>	Ex Président de la Société Marocaine des Sciences Mécaniques
<b>Pr. Abdellatif MASLOUHI</b>	Ex Président de la Société Marocaine des Sciences Mécaniques

# Comité d'Organisation

## Présidents :

Pr. ANISS S., FSAC, Université Hassan II de Casablanca

Pr. KHATYR R., FSAC, Université Hassan II de Casablanca

<b>Pr. ABDOUN F.</b>	ENSAM, Université Mohammed V, Rabat
<b>Pr. AIT ALI M.E.</b>	EMI, Université Mohammed V Rabat
<b>Pr. AZIM A.</b>	ENSA, Université Chaib Doukkali, El Jadida
<b>Pr. AZRAR L.</b>	ENSAM, Université Mohammed V, Rabat
<b>Pr. BOUCHGL J.</b>	ISPM, Agadir
<b>Pr. EL HAD K.</b>	ISEM, Casablanca
<b>Pr. LAMINE M.</b>	FS Ain Chock, Université Hassan II de Casablanca
<b>Pr. MORDANE S.</b>	FS Ben M'Sik, Université Hassan II de Casablanca
<b>Pr. OUHIMMOU S.</b>	FS Ain Chock, Université Hassan II de Casablanca
<b>Pr. OUSSOUADDI O.</b>	FS, Université Moulay Ismail, Meknès
<b>Pr. RACHID H.</b>	FS Ain Chock, Université Hassan II de Casablanca
<b>Pr. RAHMOUNE M.</b>	ESTM, Université Moulay Ismail, Meknès
<b>Pr. SEHAQUI R.</b>	FS Ain Chock, Université Hassan II de Casablanca
<b>Pr. TAIBI M.</b>	FS Ain Chock, Université Hassan II de Casablanca
<b>Pr. ZENASNI M.</b>	ENSA, Université Mohamed Premier, Oujda

# Comité Scientifique

## Présidents :

Pr. MORDANE S., FS Ben M'Sik, Université Hassan II de Casablanca

Pr. RAHMOUNE M., EST, Université Moulay Ismail, Meknès

Pr. ANISS S.	FS Ain Chock, Université Hassan II de Casablanca, Maroc
Pr. ABBADI M.	ENSA, Université Mohammed Premier, Oujda, Maroc
Pr. ABDELBAKI A.	FS, Université Cadi Ayyad, Marrakech, Maroc
Pr. ABED MERAIM F.	ENSAM, Metz, France
Pr. AFSHARI A.	Université d'Aalborg, Danemark
Pr. AGOUZOUL M.	EMI, Université Mohammed V, Rabat, Maroc
Pr. ASSARAR M.	IUT, Université Reims Champagne-Ardenne, Troyes, France
Pr. ATALLA N.	Université de Sheerbrooke, Canada
Pr. AZAIEZ M.	INP, Bordeaux, France
Pr. AZARI Z	ENIM, Université Lorraine, Metz, France
Pr. AZIM A.	ENSA, Université Chaib Doukkali, El Jadida
Pr. AZRAR L.	ENSAM, Université Mohammed V, Rabat
Pr. BHADAURIA B. S.	Université Babasaheb Bhimrao Ambedkar, Inde
Pr. BOTTON V.	Insa, Lyon, France
Pr. BOU-ALI M.	MGEP, Université Mondragon, Arrasate, Espagne
Pr. BRAIKAT B.	FS Ben M'Sik , Université Hassan II de Casablanca, Maroc
Pr. CHAARI F.	École nationale d'ingénieurs de Sfax, Tunisie
Pr. CHAMPMARTIN S.	ENSAM Angers, France
Pr. CHARIF D'OUAZZANE S.	ENSMR, Mines, Rabat, Maroc
Pr. CHARRIER-MOJTABI M.C.	IMFT, Université Paul Sabatier Toulouse III, France
Pr. CHEDDADI A.	EMI, Université Mohammed V, Rabat, Maroc
Pr. CORDIER L.	ENSMA, Université Poitiers, Poitiers, France
Pr. DALKILIC A. S.	YTU, Mechanical Engineering Faculty, Istanbul, Turkey
Pr. DAMIL N.	FS Ben M'Sik, Université Hassan II, Casablanca, Maroc
Pr. DRAOUI A.	FST, Université Abdelmalek Essaâdi, Tanger, Maroc
Pr. ECHCHELH A.	FS, Université Ibn Tofaïl, Kénitra, Maroc
Pr. EL HAD K.	ISEM, Casablanca, Maroc
Pr. EL KHLIFI M.	FST, Université Hassan II, Mohammedia, Maroc
Pr. EL KISSI N.	CNRS, Université Joseph Fourier, Grenoble, France
Pr. ELBIKRI K.	ENSAM, Université Mohammed V, Rabat , Maroc
Pr. ELGHORBEL E.	Université de Cergy-Pontoise, Cergy-Pontoise, France
Pr. ERCHIQUI F.	UQAT, Université Rouyn-Noranda, Québec, Canada
Pr. FABRE D.	IMFT, Université Paul Sabatier Toulouse III, France
Pr. FARAJI M.	FS Ain Chock, Université Hassan II de Casablanca, Maroc
Pr. FOURNIER M.	IMFT, Université Paul Sabatier Toulouse III, France
Pr. GANGHOFFER J. F	Université de Lorraine, France
Pr. GUINES D.	INSA de Rennes, Rennes, France
Pr. HADDAR M.	École nationale d'ingénieurs de Sfax, Tunisie
Pr. HARIRI S.	École des mines de Douai, Douai, France
Pr. HASNAOUI M.	FS Semlalia, Université Cadi Ayyad, Marrakech, Maroc
Pr. HATTABI M.	Université Hassan II de Casablanca, Maroc
Pr. HU H.	Université de Wuhan, China
Pr. HENRY D.	École centrale de Lyon, France
Pr. HIFDI A.	FS Ain Chok , Université Hassan II de Casablanca, Maroc
Pr. HJIAJ M.	INSA de Rennes, Rennes, France
Pr. ICHCHOU M.N.	École Centrale de Lyon, Lyon, France
Pr. JAMIL A.	EST, Université Sidi Mohamed Ben Abdellah, Fès, Maroc
Pr. KOURTA A.	Polytech, Université Orléans, Orléans, France
Pr. LAHJOMRI J.	FS Ain Chok, Université Hassan II de Casablanca, Maroc
Pr. LAKSIMI A.	Université de Technologie de Compiègne, Compiègne, France
Pr. LIMAM A.	INSA de Lyon, France
Pr. MASLOUHI Ab.	FS, Université Ibn Tofaïl, Kénitra, Maroc
Pr. MASLOUHI Ah.	FGM, Université Sherbrooke, Québec, Canada

<b>Pr. MOJTABI K.</b>	IMFT, Université Paul Sabatier Toulouse III, France
<b>Pr. MUTABAZI I.</b>	Université le Havre Normandie, France
<b>Pr. NACIRI J.K.</b>	FS Ain Chok, Université Hassan II de Casablanca, Maroc
<b>Pr. NOUARI M.</b>	St Diès-des-Vosges, Université Lorraine, Nancy, France
<b>Pr. NTAMACK G.E.</b>	FS, Université Ngaounderé, Ngaounderé, Cameroun
<b>Pr. OUAZZANI M.T.</b>	FS Ain Chok, Université Hassan II de Casablanca, Maroc
<b>Pr. OUAZZANI M.T.</b>	EMI, Université Mohamed V, Rabat, Maroc
<b>Pr. OUBARRA A.</b>	FS Ain Chok, Université Hassan II de Casablanca, Maroc
<b>Pr. OUSSOUADDI O.</b>	FS, Université Moulay Ismail, Meknès, Maroc
<b>Pr. PLOURABOUE F.</b>	IMFT, Université Paul Sabatier Toulouse III, France
<b>Pr. RACHIK M.</b>	Université de Technologie de Compiègne, Compiègne, France
<b>Pr. RAPHAEL E.</b>	ESPCI, Paris, France
<b>Pr. SAADANI R.</b>	EST , Université Moulay Ismail, Meknès, Maroc
<b>Pr. SARSRI D.</b>	ENSA , Université Abdelmalek Essaâdi, Tanger, Maroc
<b>Pr. SEHAQUI R.</b>	FS Ain Chok, Université Hassan II de Casablanca, Maroc
<b>Pr. SIMOES F.M.F.</b>	Université Lisbonne, Lisbonne, Portugal
<b>Pr. SKALI LAMI S.</b>	LEMTA -ENSEM , Université Lorraine, Nancy, France
<b>Pr. TAHA JANAN M.</b>	ENSAM, Université Mohammed V, Rabat , Maroc
<b>Pr. TRI A.</b>	ISEM, Casablanca, Maroc
<b>Pr. YAO K.</b>	Luxembourg Institute of Science and Technology, Luxembourg
<b>Pr. ZAGZOULE M.</b>	IMFT, Université Paul Sabatier, Toulouse, France
<b>Pr. ZAHROUNI H.</b>	Université Lorraine, Metz, France
<b>Pr. ZENASNI M.</b>	ENSA, Université Mohamed Premier, Oujda
<b>Pr. ZHANG C.</b>	Shandong University, China
<b>Pr. ZIDI M.</b>	Université Paris-Est Créteil, France
<b>Pr. ZRIKEM Z.</b>	FS Semlalia, Université Cadi Ayyad, Marrakech, Maroc

## Thème 01 :

### Dynamique, vibrations et acoustique

T01005	<b>OUADIE EL MRIMAR AND OTHMANE BENDAOU</b> Méthode stochastique pour l'analyse dynamique des systèmes mécaniques : Application au saut à la perche	2
T01008	<b>NADIA EL ABBAS, KHAMLICHY ABDELLATIF AND BEZZAZI MOHAMMED</b> Seismic responses of a mat-foundation system subjected to soil-structure interaction, local uplift and soil plasticity	5
T01023	<b>J. HOUYOUK, J. A. MANYO MANYO, G. E. NTAMACK, L. AZRAR</b> Coefficients de réflexion et de transmission des structures multicouches périodiques avec effet d'interface par le Pseudo-formalisme de Stroh	8
T01031	<b>I. ZITOUNI, H. RHIMINI AND A. CHOUAF</b> Dispersion curves of composite graphite-epoxy by a hybrid analytic method	11
T01074	<b>F. BOUSSAOUI, H. LAHMAM, B. BRAIKAT</b> Numerical modeling of the nonlinear dynamic behavior of a helical beam with circular cross-section	14
T01082	<b>K. BELFALLAH, M. JAMAL</b> Modeling and simulation of the propagation of elastic waves in a magnetostrictive actuator by meshless method	17
T01090	<b>SOUMAYA ELJANOUS, ABDELOUAFI EL GHOULBZOURI</b> Influence du type de sol sur la réponse sismique de la structure en considérant l'interaction sol-structure	20
T01100	<b>M. TAHIRI, A. KHAMLICHY, M. BEZZAZI</b> Nonlinear analysis of the track-bridge interaction effect on the dynamics of a high speed railway bridge	23
T01112	<b>S. YOUSOUFOU, J. HOUYOUK, H.H MEUYOU, G. E. NTAMACK, L. AZRAR</b> Détermination des coefficients de réflexion et de transmission des coques multicouches	26
T01116	<b>K. EL HARTI, M. SANBI, R. SAADANI, M. RAHMOUNE</b> Contrôle actif des vibrations des poutres à section non uniforme	29
T01135	<b>SAID EL HANKARI, RACHID DKIOUAK, KHALID ROKY</b> Dynamic response of a partially clamped simply supported railway bridge under moving trains: resonance and cancellation phenomena.	32
T01146	<b>A. OUZIZI, F. ABDOUN, L. AZRAR</b> Large amplitude dynamics of beams on nonlinear fractional viscoelastic foundation subjected to moving load	35
T01160	<b>M. JANANE ALLAH, A. TIMESLI, Y. BELAASILIA</b> Étude de vibration libre des plaques poreuses fonctionnellement graduées en utilisant la théorie de déformation de troisième ordre (TSDT)	38
T01170	<b>L. EL KHALDI, M. SANBI, R. SAADANI, M. RAHMOUNE</b> Optimal and robust controls comparison of thermo-piezoelectric composite plate with Reduced Order FE Modelling and Monte Carlo Simulation	41

## Thème 02 :

### Modélisation en mécanique des solides et des structures

T02012	<b>H. KARIM SERROUKH, O. BOUARAQUIA, M. MABSSOUT</b> Evaluation of dynamic stress intensity factors using Taylor-SPH method	45
T02027	<b>E. CHOUHA, Z. EL MASKAOUI, A. CHOUAF, S.E. JALAL</b> The effect of brace inclination on the stress concentration factor distribution in welded tubular Y-joints subjected to deflected bending load.	48
T02032	<b>O. EL BAJI, N. BEN SAID AMRANI, D. SARSRI</b> Dynamic modeling of a scara robot using a new formalism	51
T02038	<b>H. MAIMOUNI, B. KISSI, H. KHATIB</b> Bowstring Bridge : numerical linear analysis and stress-strain comparison of different suspension removal scenarios	54
T02049	<b>Z.SAFFAH, H. LAHMAM, A. TIMESLI, A. AZOUANI</b> Un algorithme d'ordre élevé combinant la méthode asymptotique numérique et une technique d'optimisation du paramètre de forme utilisé dans les fonctions de base radiale pour le calcul élastique non linéaire des structures	57
T02051	<b>T.TOUGUI, L. BOUSSHINE</b> Analysis of elastoplastic behavior of a bolted beam-to-column joint by finite element method	60
T02070	<b>Y. KHARBAOUI, O. ASKOUR, A. TRI, B. BRAIKAT</b> Couplage de la méthode des solutions fondamentales avec la technique de décomposition des domaines : application à l'équation de Laplace	63
T02073	<b>C. EL KHAL, O. ASKOUR, Y. BELAASILIA, A. HAMDAOUI, B. BRAIKAT, N. DAMIL, M.POTIER-FERRY</b> Modeling elastoplastic structures in finite transformation by a high-order algorithm	66
T02075	<b>H. SALMI, KH. EL HAD, H. EL BHILAT, A. HACHIM</b> Effect of the transition zone on the harmfulness of defect in a pipe with double slope : Numerical simulation with XFEM	69
T02077	<b>Y. BOUNJOUR, M. AIT EL FQIH</b> Damage simulation study of CFRP carbon fiber reinforced polymer reinforcement	72
T02109	<b>M. HAIEK, Y. LAKHAL, N. BEN SAID AMRANI, Y. EL ANSARI, D. SARSRI</b> Analysis of the effect of elastic joints on the dynamic behavior of a bolted structure	75
T02128	<b>M. BAHA, R. ELKORI, A. LAMARTI, S. OUHIMMOU, A. HACHIM, R. SEHAQUI</b> Numerical simulation of the mechanical behavior of two polymers (high impact Polystyrene (HIPS) and high-density polyethylene (HDPE)) during flexural test	78
T02149	<b>H. BALKISSOU, F.P. EWOLO NGAK, G.E. NTAMACK, L. AZRAR</b> Modélisation du comportement dynamique des poutres stratifiées piézoélectriques par le pseudo formalisme de Stroh	81
T02161	<b>M.T. FADEL, M. RGUIG, M. EL AROUSSI, S. SAADANE</b> Calcul à la rupture des arcs en maçonnerie : comparaison entre deux méthodes numériques	84
T02165	<b>ZAENAB BAKHACH, AHMED EL KAIBILLAH, ABDELLAH HAMDAOUI, BOUAZZA BRAIKAT, FOUJIL MOHRI, NOUREDDINE DAMIL</b> Buckling and lateral buckling interaction of a thin-walled beam with open-section	87
T02166	<b>Z. ZENASNI, K. NASRI, M. HATERBOUCH, M. ZENASNI</b> Effet de l'enrobage sur l'interface acier béton sous hautes températures	90

## Thème 03 :

## Matériaux solides et composites

T03010	<b>M. ZAINI, M. IDIRI, M. AIT EL FQIH</b> Experiment and simulation study of the effect of fillers on mechanical properties of sustainable composite.	94
T03061	<b>T.KARAFI, A.TAHIRI, M. IDIRI, B.BOUBEKER</b> Effect study of rhenium addition on hardness and elastic modulus of tungstenrhenium alloy by molecular dynamics simulation	97
T03103	<b>A. OUEZGAN, S. ADIMA, A.MAZIRI, E. MALLIL, J. ECHAABI</b> Conception innovante d'un moule RTM pour l'industrie automobile	100
T03107	<b>M. BELLAHKIM, Y. BENBOURAS, A. MAZIRI, EL. MALLIL, J. ECHAABI</b> L'effet du rapport Portée-Épaisseur sur la Rupture Interlaminaire dans un Composite Stratifié Unidirectionnel en Carbone/Epoxyde	103
T03110	<b>H. EL BHILAT, K. EL HAD, H. SALMI, H. MABCHOUR, A. HACHIM</b> Characterization of post-consumer recycled high impact polystyrene from disposable cupstimes new roman	106
T03145	<b>N. TASSI, L. AZRAR, N. FAKRI, A. A. ALJINAIDI</b> Coupled thermo-magneto-electro-elastic effective properties : micromechanical modeling	109
T03150	<b>DJAOYANG GOGOBELE, GUY EDGAR NTAMACK, SAAD CHARIF D'OUAZZANE</b> Contribution à la détermination des coefficients élastiques du béton chaux-chanvre par quelques méthodes d'homogénéisation	112
T03172	<b>R. ADDOU, Z. ZENASNI, K. HANNAWI, M. ZENASNI, W.P. AGBODJAN</b> Effet du traitement thermique sur la microstructure des Mortiers élaborés à base de déchets stériles de charbon.	115

## Thème 04 :

## Conception et production intégrées, Procédés de fabrication

T04022	<b>R .BENMESSAOUD, A.MOUCHTACHI</b> Controlled speed sheet metal drawing of an AA 3003-H12 alloy dome	119
T04086	<b>N. BOUKTIB, A. KHELLOUKI, M. AIT EL FKI, W. BOUAB</b> Corrélation entre la rugosité initiale de la surface et les contraintes résiduelles lors d'une opération de toilage : Une nouvelle approche	122
T04108	<b>S. ABOUHAZIM, A. ELJIHAD, O. LKADI, M. NASSRAOUI, O. BOUKSOUR</b> Design for fused deposition modelling vs design for injection molding : case study in the automotive industry	125
T04127	<b>A. KOTTAT, M. E. AIT ALI</b> Detailed study of endurance and takeoff distance effect on pre-sizing of unmanned aerial vehicle	128
T04147	<b>K. BOUNIF, M. NOUARI, M. ABBADI</b> Endommagement par fissuration d'un outil de coupe revêtu en diamant lors des procédés d'usinage	131

## Thème 05 :

## Rupture et fatigue des matériaux

T05017	<b>R. ELKORI, A. LAMARTI, K. EL HAD, A. HACHIM</b> Experimental study of the stress intensity factor of high density polyethylene (HDPE)	135
T05028	<b>O. AOURIK, A. CHOUAF, M. OTHMANI, B. SAADOUKI</b> Effet de l'angle de raster sur la résistance à la propagation de la fissure dans les éprouvettes sent imprimées en ABS par FDM	138
T05037	<b>M. LAHLOU, A. EN-NAJI, N. MOUHIB, B. SAADOUKI, F.MAJID, R. RHANIM</b> Étude du comportement d'une éprouvette (CT) en Acier P265 GH	141
T05052	<b>FATIMA EZZHRA HARRAT, KHALID ELHAD, ABDLELILAH HACIM</b> Experimental study of the tensile behavior of Polypropylene polymers in hydrochloric acid transport pipes under the effect of thickness and strain rate variation.	144
T05058	<b>A. Ouardi, N. MOUHIB, A. ELGHORBA</b> Caractérisation de l'influence des défauts longitudinaux sur la résistance des tubes en Polypropylène (PPR) à la pression	147
T05071	<b>O. ELMHAIA, Y. BELAASILIA, O. ASKOUR, B. BRAIKAT, N. DAMIL</b> A meshless approach to compute stress intensity factor	150
T05101	<b>M. MEKNASSI, M. MOURABIT, A. WAHID, M. ELGHORBA, S. MORDANE</b> Étude expérimental du comportement mécanique de l'âme centrale extrait d'un câble métallique de levage endommagé par corrosion	153
T05138	<b>A. EL MOUSTAPHAOUI, A. CHOUAF, KH. KIMAKH</b> Caractérisation de la propagation du délaminage du contreplaqué de Ceiba en mode I, mode II et mode mixte I+II	156
T05144	<b>B. EL HADIM, H. EL MINOR</b> La triaxialité des contraintes comme paramètre d'évaluation de la distance effective en approche volumétrique de la mécanique de la rupture en mode II	159
T05151	<b>M. BENNEBACH, B. DEPALE</b> Residual life assessment of metallic structures	162
T05152	<b>A. ESSAKHI, A. BOULEZHAR, M. EZZAHMOULY, Z. HATIM, A. MOUTAWAKIL</b> Toughness of biomaterial used in implantology with numerical methods	165
T05164	<b>N.EL AOUCHATI, H.MILOUKI, A.EL AMRI, A.CHOUAF</b> Prédiction simple de la rugosité de surface des engrenages droits taillés par une fraise de forme dans le cas d'un matériau isotrope.	168

## Index des Auteurs-Tome I

171



**Thème 01 :**  
**Dynamique, vibrations et acoustique**

# Méthode stochastique pour l'analyse dynamique des systèmes mécaniques : Application au saut à la perche

O. EL MRIMAR<sup>1</sup>, O. BENDAOU<sup>1</sup>

1. Département de physique, Faculté des sciences, Université Abdelmalek Essaadi, avenue Sebta, 93002 Tétouan, Maroc  
elrimar.ouadie-etu@uae.ac.ma o.bendaou@uae.ac.ma

## Résumé

Cet article décrit une approche stochastique du comportement dynamique du système perche-athlète qui est identique à un pendule inversé. Ce modèle est considéré comme outil pour étudier l'influence des différents paramètres sur la performance du saut. Dans cette recherche, nous proposons une approche stochastique pour prendre en compte des incertitudes, basée sur l'utilisation de la méthode de perturbation (MP) et la méthode de Monte Carlo (MC), afin de déterminer la réponse dynamique de ce système masse-ressort, dans lequel les paramètres associés sont incertains.

Les résultats de la méthode de perturbation sont comparés à ceux de la méthode de référence de Monte Carlo via l'environnement MATLAB.

**Mots clés :** *Stochastique, Saut à la perche, Masse-ressort, Method de Monte Carlo, Méthode de Perturbation*

## 1. Introduction (12 gras)

Le saut à la perche est une discipline olympique dans laquelle l'athlète tente de franchir la barre le plus haut possible par l'intermédiaire d'une perche flexible. Par conséquent, la performance obtenue change considérablement par la combinaison de deux facteurs déterminants tels que les propriétés de la perche et les capacités physiques de l'athlète. Le saut à la perche a fait l'objet de nombreux travaux scientifiques. Les chercheurs cherchent à identifier les facteurs de performance soit par des études expérimentales, soit par des simulations numériques basées sur des modèles mécaniques ou mathématiques [1].

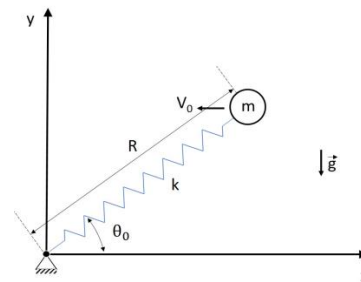
Dans le contexte actuel où la victoire se joue sur le moindre détail, il est devenu indispensable de réaliser une étude stochastique pour prendre en compte les incertitudes des différents paramètres associés au système dynamique constitué d'une masse ponctuelle et d'un ressort linéaire. Cette recherche nous permet de

savoir l'influence de ses paramètres incertains sur la performance du saut. L'approche déterministe du système basé sur les équations différentielles du mouvement déterminées par la méthode de Lagrange. Pour évaluer la variabilité des réponses dynamiques par rapport aux paramètres incertains, une simulation de Monte Carlo est utilisée [2]. Cette méthode est souvent utilisée comme référence, malgré le temps de calcul prohibitif limitant l'utilisation de cette méthode. Nous utilisons donc la méthode des perturbations [3-4]. Cette méthode est basée sur le développement en série de Taylor et elle permet de calculer directement les moyennes et les écarts types.

## 2. Modélisation dynamique

### 2.1 Système Masse-Ressort

On considère le système composé d'une masse ponctuelle  $m$  et d'un ressort linéaire de raideur  $k$ . On suppose que la longueur et l'angle initial du ressort sont respectivement  $R$  et  $\theta$ . La masse a une vitesse initiale  $v_0$  le long de l'axe négatif  $y$ .



**Fig. 1.** Dynamique du système masse ponctuelle et ressort linéaire

### 2.2 L'équation du mouvement

Les équations de mouvement du système masse-ressort sont déterminées par la méthode de Lagrange dans la base des coordonnées polaire, où  $R$  et  $\theta$  sont les coordonnées généralisées, les équations de mouvement sont les suivantes :

$$\begin{bmatrix} \ddot{R} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\theta^2 + \frac{k}{m}(R_0 - R) - g \sin \theta \\ -\frac{2}{R}\dot{\theta}\dot{R} - \frac{g}{R}\cos \theta \end{bmatrix} \quad (1)$$

Les conditions initiales sont :

$$\begin{aligned} R(0) &= R_0 & \theta(0) &= \theta_0 \\ \dot{R}(0) &= -V_0 \cos \theta & \dot{\theta}(0) &= \frac{V_0}{R_0} \sin \theta \end{aligned} \quad (2)$$

Nous adimensionnalisons l'équation (1) en introduisant les variables non-dimensionnelles suivantes pour le temps, la position et la vitesse :

$$\tau = t \sqrt{\frac{k}{m}} \quad r = \frac{R}{R_0} \quad \mathcal{G}_0 = \frac{V_0}{R_0} \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3)$$

L'équation non-dimensionnelle est :

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \dot{\theta} + (1-r) - \varepsilon \sin \theta \\ -\frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \frac{\varepsilon}{r} \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

En raison du poids de la masse, la déviation statique non-dimensionnelle du ressort est  $\varepsilon$ , où :  $\varepsilon = \frac{\delta}{L_0} \delta = \frac{mg}{k}$

Les conditions initiales non-dimensionnelles sont :

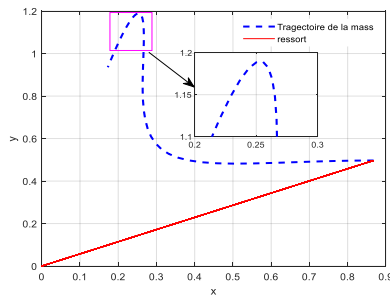
$$\begin{aligned} r(0) &= r_0 & \theta(0) &= \theta_0 \\ \dot{r}(0) &= -\mathcal{G}_0 \cos \theta & \dot{\theta}(0) &= \frac{V_0}{r_0} \sin \theta \end{aligned} \quad (5)$$

À un certain moment, la masse doit être libérée du ressort, à condition que ces deux conditions aux limites soient satisfaites.

$$\dot{r}(\tau_f) = 1, \quad r(\tau_f) \cdot \cos \theta(\tau_f) = r(\tau_f) \cdot \dot{\theta}(\tau_f) \cdot \sin \theta(\tau_f) \quad (6)$$

Enfin, la masse ponctuelle se déplace librement sous l'influence de la gravité uniquement, alors sa dynamique sera donnée par la relation :  $\ddot{Z} = -g \rightarrow \ddot{z} = -\varepsilon$

La dynamique du système masse-ressort est décrite par l'intégration de l'équation différentielle (4), en utilisant les conditions initiales de (5), en prenant par considération la résolution du problème des valeurs limites à deux points TPBVP de l'équation (6)



**Fig.2** Réponse déterministe du système dynamique

Les résultats sont présentés dans la figure 2 en transformant le système de coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes  $x = r \cos \theta$ ;  $y = r \sin \theta$ , seul  $\mathcal{G}_0 = 0.412$  satisfait pour les deux conditions aux limites à  $\tau_f = 0.367$  ce qui fournit la solution de TPBVP. A cet instant la masse se détache du ressort, la hauteur maximale atteinte par la masse est  $h=1.191$ .

### 3. Méthode de perturbation

Dans cette section, Pour évaluer la variabilité de la réponse dynamique de mouvement du système avec des paramètres aléatoires, une simulation directe de Monte Carlo a été utilisée comme référence pour le calcul, malgré le temps de calcul prohibitif limitant son utilisation. Nous allons appliquer la méthode des perturbations. Nous supposons que les paramètres de déviation statique  $\varepsilon$  et de la vitesse initiale  $\mathcal{G}$  sont en fonctions des variables aléatoires :  $\{\alpha_p\}_{p=1,\dots,p}$

Le développement de ces paramètres en série de Taylor à l'ordre un s'écrit :

$$[\varepsilon] = [\varepsilon]^0 + [\varepsilon]^n d\alpha_n ; [\mathcal{G}] = [\mathcal{G}]^0 + [\mathcal{G}]^n d\alpha_n \quad (7)$$

Le vecteur des paramètres moyens est défini par  $\{\alpha\}$  et

la quantité :  $\{d\alpha\} = \{\alpha\} - \{\bar{\alpha}\}$

$[\cdot]$ ,  $[\cdot]$  sont des valeurs déterministes correspondant aux dérivées partielles d'ordre zéro et premier ordre  $n=1$ , par rapport au paramètre aléatoire  $\alpha_i$ , données par :

$$\begin{aligned} [A]^0 &= [A](\alpha) \Big|_{\alpha=\bar{\alpha}} \\ [A]^n &= \frac{\partial [A](\alpha)}{\partial \alpha_n} \Big|_{\alpha=\bar{\alpha}} \end{aligned} \quad (8)$$

Les vecteurs inconnus de position, de vitesse et d'accélération sont également développés par des séries de Taylor comme suit :

$$\begin{aligned} \{r\} &= \{r\}^0 + \{r\}^n d\alpha_n \\ \{\dot{r}\} &= \{\dot{r}\}^0 + \{\dot{r}\}^n d\alpha_n \\ \{\ddot{r}\} &= \{\ddot{r}\}^0 + \{\ddot{r}\}^n d\alpha_n \\ \{\theta\} &= \{\theta\}^0 + \{\theta\}^n d\alpha_n \\ \{\dot{\theta}\} &= \{\dot{\theta}\}^0 + \{\dot{\theta}\}^n d\alpha_n \\ \{\ddot{\theta}\} &= \{\ddot{\theta}\}^0 + \{\ddot{\theta}\}^n d\alpha_n \end{aligned} \quad (9)$$

On remplace le développement de toutes les quantités dans l'équation de mouvement (4), et on regroupe les termes de même ordre on obtient :

❖ Equation d'ordre zéro :

$$\begin{aligned} \{\ddot{r}\}^0 - \{r\}^0 \{\dot{\theta}\}^{0^2} - (1 - \{r\}^0) + [\varepsilon]^0 \{\sin \theta\}^0 &= 0 \\ \{r\}^0 \{\ddot{\theta}\}^0 + 2\{\dot{r}\}^0 \{\dot{\theta}\}^0 + [\varepsilon]^0 \{\cos \theta\}^0 &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

❖ Equation d'ordre un :

$$\begin{aligned} \{\ddot{r}\}^n - \{r\}^0 \{\dot{\theta}\}^{n^2} - \{r\}^n \{\dot{\theta}\}^n - (1 - \{r\}^n) \\ + [\varepsilon]^0 \{\sin \theta\}^n + [\varepsilon]^n \{\sin \theta\}^0 &= 0 \\ \{r\}^0 \{\ddot{\theta}\}^n + \{r\}^n \{\ddot{\theta}\}^0 + 2\{\dot{r}\}^0 \{\dot{\theta}\}^n + \\ 2\{\dot{r}\}^n \{\dot{\theta}\}^0 + [\varepsilon]^0 \{\cos \theta\}^n + [\varepsilon]^n \{\cos \theta\}^0 &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

La résolution successive des équations (10), et (11) peut se faire en transformant les variables d'état des coordonnées polaires vers les coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \{x\}^0 &= \{r\}^0 \cos\{\theta\}^0 \\ \{y\}^0 &= \{r\}^0 \sin\{\theta\}^0 \\ \{x\}^n &= \{r\}^n \cos\{\theta\}^n + \{r\}^0 \{\theta\}^n \sin\{\theta\}^0 \\ \{y\}^n &= \{r\}^n \sin\{\theta\}^n + \{r\}^0 \{\theta\}^n \cos\{\theta\}^0 \end{aligned} \quad (12)$$

Finalement les valeurs moyennes des déplacements  $\{x(t)\}$  et  $\{y(t)\}$  sont données par :

$$\begin{aligned} E[x(t)] &= \{x(t)\}^0 \\ E[y(t)] &= \{y(t)\}^0 \end{aligned} \quad (13)$$

Et la variance de  $\{x(t)\}$  et  $\{y(t)\}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{var}[x(t)] &= \{x(t)\}^{n^2} \text{var}(\alpha_n) \\ \text{var}[y(t)] &= \{y(t)\}^{n^2} \text{var}(\alpha_n) \end{aligned} \quad (14)$$

### 4. Simulation et résultats

Dans cet article, nous avons pris les paramètres de déviation statique du ressort  $\varepsilon$ , et la vitesse initiale  $\mathcal{G}_0$  comme des variables aléatoires gaussiennes avec :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \sigma_\varepsilon \eta_1, \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}_0 + \sigma_\mathcal{G} \eta_2$$

$\varepsilon_0$  et  $\mathcal{G}_0$  désignent les valeurs moyennes,  $\eta_1, \eta_2$  sont les variables aléatoires normales entre  $[0, 1]$ ,  $\sigma_\varepsilon, \sigma_\mathcal{G}$  sont les écarts types associés.

La réponse stochastique temporelle est déterminée en utilisant la simulation de Monte Carlo et la méthode de perturbation. Les résultats sont représentés sur les figures 3 et 4. Ils représentent respectivement la moyenne et la variance du déplacement temporel pour  $\sigma = 5\%$ . On peut constater que les deux méthodes d'analyse stochastique fournissent des résultats similaires avec une diminution significative du coût de calcul Tableau 1.

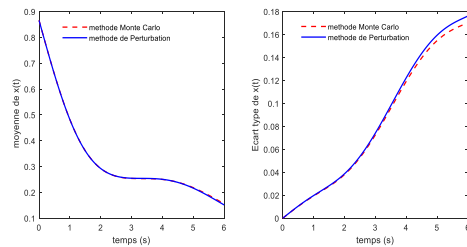


Fig.3. Valeur moyenne instantanée et l'écart type de  $x(t)$  pour  $\sigma = 5\%$

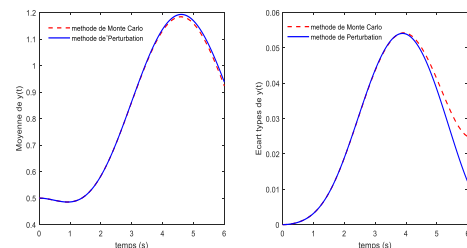


Fig.4. Valeur moyenne instantanée et l'écart type de  $x(t)$  pour  $\sigma = 5\%$

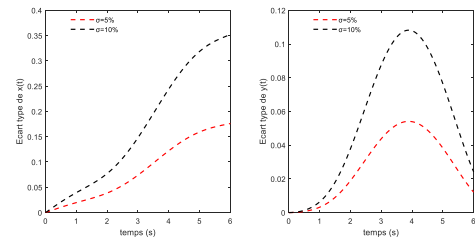


Fig.5. Écart-type de  $x(t)$  et  $y(t)$  pour  $\sigma = 5\%$   $\sigma = 10\%$

Les résultats de l'écart-type du déplacement de  $x(t)$  et  $y(t)$ , pour  $\sigma = 5\%$  et  $\sigma = 10\%$ , l'erreur augmente lorsque l'écart-type du paramètre incertain augmente Fig. 5.

Tableau 1. Comparaison du temps CPU en (s) entre les deux méthodes de simulation : MC et PM d'ordre 1

	Simulation de Monte Carlo MCS	Méthode de Perturbation au premier ordre.
CPU time in (s)	45.45	1.34

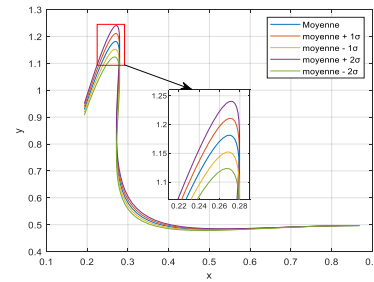


Fig.6. Comparaison des réponses stochastique avec la réponse moyenne

### 5. Conclusion

Les résultats de la méthode de perturbation sont similaires à ceux de la méthode de Monte Carlo. Ces résultats ont montré que cette méthode est efficace en termes de gain de temps de calcul. Nous avons conclu que les deux paramètres stochastiques  $\varepsilon$  et  $\mathcal{G}$  affectent significativement à la performance du saut comme le montre la figure 6.

### Références

- [1] S. Chau, R. Mukherjee, *Kinetic to potential energy transformation using a spring as an intermediary: application to the pole vault problem*, Journal of applied mechanics, transactions ASME, volume 86, (2019).
- [2] G.S Fishman., *Monte Carlo: concepts, algorithms and applications*. Springer-verlag New York, Inc.,1996.
- [3] O. Bendaou, JE. Rojas, A. El Hami *Stochastic and reliability analysis of a propeller with model reduction*, European Journal of Computational Mechanics volume 18, (2009),195-215.
- [4] M. Lamhari, D. Sarsari, L. Azrar, M. Rahmoune, K.Sbai, *Non Linear vibrations of large structures with uncertain parameters*, Advances in mechanical engineering ,volume 9,(2017),1-11.

## Seismic responses of a mat-foundation system subjected to soil-structure interaction, local uplift and soil plasticity

Nadia El Abbas<sup>1</sup>, Khamlichi Abdellatif<sup>2</sup> and Bezzazi Mohammed<sup>1</sup>

1. Department of Physics, Faculty of Science and Techniques Tangier, nadia.elabbas@gmail.com, bezzazi@hotmail.com

2. Department TITM, ENSA Tetouan, khamlichi7@yahoo.es

### Abstract

The objective of this study is to analyze the dynamic responses of large rotations for a mat-foundation system. The soil-structure interaction was schematized by a series of Saint-Venant units mounted in parallel and distributed over the entire width of the foundation.

The analysis has taken into account both local uplift of the foundation and plastic behavior of the soil. However, the system of differential equations is strongly nonlinear. This was integrated by using the Matlab command ode15s.

The response of the system was determined for soil elastic or elastic-perfectly plastic, and under the effects of large or small rotations. It is shown that the maximum values of rotation depends on the plasticity of the soil and the rotations magnitudes.

**Keywords:** *Elastic-perfectly plastic; small rotations; large rotations; local uplift; soil-structure interaction*

### 1. Introduction

The importance of the dynamic response of structures supported by flexible foundations has attracted attention from many researchers in recent years [1].

The analytical study evaluating the rocking response of a Single-Degree-Of-Freedom (SDOF) system considering uplifting of the foundation [2]. In this study, individual linear elastic spring elements were considered. For SDOF systems, the authors developed simplified expressions to determine the base shear resistance of flexible structures when allowed to uplift. It was observed that for a multi-story building structure, although the foundation flexibility and uplift have considerable effect on the fundamental mode of vibration, they have little effect on higher modes.

For more intense, the practical analysis model of a SDOF system of bridge piers for seismic response analysis [3,4], where the interaction between bridge piers and supporting soil was simulated by the improved elastic-plastic Winkler model in which the uplifting effect of foundations can be considered. They have concluded that permitting uplifting and plasticity of foundations in design can reduce the seismic load acting on the pier body and play an advantageous role in the seismic ability of bridge piers.

A parametric study was performed and the maximum response of the system was evaluated [5], the authors analyzed large rotations and p-delta effects on the dynamic response of a structure subjected to seismic loading and local uplift. It was found that, assuming small rotation of foundation under seismic loading can yield more adverse structural response, while the p-delta effect has no noticeable effect.

The present work aims at performing analysis of the effect of local uplift on the seismic response of a structure laying on an elastic-plastic soil by considering both small and large rotations. The soil-structure interaction is schematized by distributed supporting elements of Saint-Venant type. The dynamic system response is determined under 1940 El Centro earthquake record. The degrees of freedom are related to mat tip lateral displacement, base vertical displacement and base rotation. The non-linear differential systems of equations of motion of the system are integrated by using the Matlab command ode15s.

### 2. Materials and Methods

#### 2.1 Modeling of soil structure

The system considered for the structure consists of SDOF of mass  $m$ , stiffness  $k$  and damping  $c$ . This oscillator is supposed to be mounted on a rigid foundation basis. This last is assumed to react as a rigid rectangular plate of negligible thickness with total mass  $m_0$  taken to be uniformly distributed over its length. The total moment of inertia is designated by  $I_0$ .

The soil-structure interaction takes place at the interface separating the rigid footing and the foundation soil. The coupling of the system is modeled by distributed Saint-Venant's units mounted in parallel. Each unit contains an elastic spring connected in series with a plastic element which is activated if the stress from the elastic spring reaches the yield stress  $\sigma_y$ , according to the constitutive behavior shown on Fig.1, where  $k_w$  is the soil modulus of elasticity per unit length. The units are distributed over the entire width of the foundation, see Fig. 2. Horizontal slippage between the mat and supporting elements is assumed to be negligible.

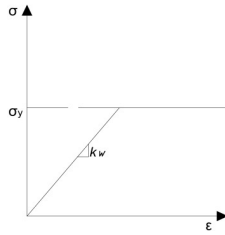


Fig.1 Elastic perfectly plastic behavior of a Saint-Venant's unit.

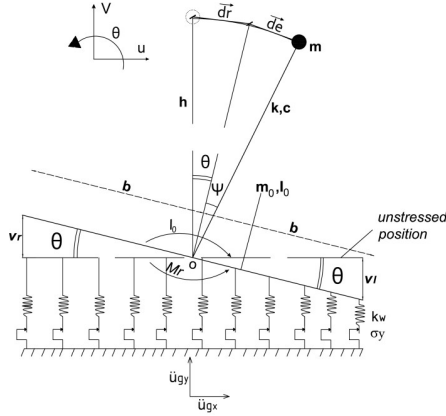


Fig.2 Flexible structure on elastic-perfectly plastic foundation

In Fig. 2,  $h$  designates the height of the structure from the base,  $M_r$  the total moment acting on the base mat,  $\vec{d}_r$  the rigid horizontal displacement,  $\vec{d}_e$  the elastic horizontal displacement of the mat tip relative to the base,  $\ddot{u}_g$  the seismic acceleration,  $v$  the vertical displacement of the centre of gravity of the base mat,  $\theta$  the angle of rotation of the mat base,  $\psi$  the angle rotation due to the deformation of the structure assuming small so that  $\sin(\psi)$  and  $\cos(\psi)$  can be approximated by  $\psi$  and 1 respectively and  $b$  the half width of the foundation mat. In the elastic range of deformation, the stress-strain relationship is given by:  $\sigma = k_w(v \pm x\theta)$  where  $v$  is the vertical displacement of the base mat centre of gravity,  $\theta$  is the angle of rotation of the mat base and  $x$  is the abscissa along the foundation with the origin taken at its centre. When the stress reaches the threshold  $\sigma_y$  for some plastic frontier point  $x_{pi}$ , where  $i=l$  or  $r$  that designates left or right edge, then  $\sigma = \sigma_y$ . Also, local uplifting occurs if  $\sigma = 0$  for some critical position point  $x_{ci}$ .

Let us introduce the following notations:

$\omega = \sqrt{k/m}$  natural frequency of the rigidly supported structure;

$\omega_v = \sqrt{2k_w b / (m + m_0)}$  vertical vibration frequency of the system with its foundation mat bonded to the supporting elements;

$\alpha = h/b$  slenderness ratio;

$\beta = \omega_v / \omega$  frequency ratio;

$\gamma = m/m_0$  foundation mass to superstructure mass ratio;

$\xi = c / (2m\omega)$  damping ratio of the rigidly supported structure;

$\xi_v = c_w b / [(m + m_0)\omega_v]$  damping ratio in vertical vibration of the system with its foundation mat bonded to the supporting elements.

The elastic perfectly plastic analysis and uplifting nonlinearity are dealt with according to the following steps:

Step 1: Under a selected ground motion and for actual positions of base that are associated to uplift or plastic frontier conditions, compute the answer of the coupled system for the given increment and obtain: (i) the rotation of the base, (ii) the vertical displacement, (iii) the horizontal displacement.

Step 2: Compare the actual obtained value of  $\theta$  with zero.

Step 3: Determine the actual value of critical positions  $x_{ci}$  which correspond to  $\sigma = 0$ .

Step 4: Determine the actual value of plastic positions  $x_{pi}$  which correspond to  $\sigma_y = k_w(v \pm x_{pi}\theta)$ .

Step 5: Compare  $x_{pi}$  with algebraic value of half width of foundation mat.

Step 6: Compare  $x_{pi}$  with  $x_{ci}$ .

## 2.2 Equations of motion

Following the previous study [5], the equations of motion are derived by expressing the equilibrium of the coupled foundation-mat system. The three equilibrium equations are:

- Equilibrium of horizontal forces acting on the coupled foundation-mat system:  $\sum F_x = 0$
- Equilibrium of vertical forces acting on the coupled foundation-mat system:  $\sum F_y = 0$
- Equilibrium of moments acting on the coupled foundation-mat system written at the center of the foundation:  $\sum M_z = 0$

### 2.2.1 Equations of motion for large rotations

According to [5], the obtained equations of motion are coupled equations and can be write as:

$$\ddot{u} + \frac{ch \cos(\theta)}{m(h \cos^2(\theta) - \sin(\theta)u)} \dot{u} + \frac{kh \cos(\theta)}{m(h \cos^2(\theta) - \sin(\theta)u)} u = -\ddot{u}_{gx} - \dot{d}_{rx} \quad (1)$$

$$\ddot{v} = -\frac{\varepsilon_2 k_w \sin(\theta)}{2(m + m_0)} (1 - \varepsilon_1^2) [x_{pl}^2 + x_{pr}^2 + b^2] - \frac{2k_w b v}{(m + m_0)} - g + \ddot{u}_{gy} - \frac{h\ddot{\theta}}{2} \left[ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] - \frac{h\dot{\theta}^2}{4} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - 9\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (2)$$

$$+ \tan(\theta)\ddot{u} + 2(1 + \tan^2(\theta))\dot{\theta}\dot{u} + (1 + \tan^2(\theta))(\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}^2 \tan(\theta))u$$

with

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 1 & \text{contact at both edges} \\ \frac{\varepsilon_2 v}{b \sin(\theta)} & \text{one edge is uplifted} \end{cases} \quad (3)$$

$$\varepsilon_2 = \begin{cases} -1 & \text{left edge uplifted} \\ 0 & \text{contact at both edges} \\ 1 & \text{right edge uplifted} \end{cases} \quad (4)$$

The vertical displacement on both edges of the foundation noted and measured from the initial position are:

$$v_i = v \pm b \sin \theta(t), \quad i = l, r \quad (5)$$

Because the foundation cannot extend above its initial unstressed position an edge of the foundation mat would uplift when:

$$v_i > 0, \quad i = l, r \quad (6)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{3\alpha^2}{\gamma h} (c\dot{u} + ku) - \frac{\varepsilon_2 \alpha^2 k_w \sin(\theta)}{m\gamma h^2} \left( (1 - \varepsilon_1^2)(x_{pl}^3 + x_{pr}^3) + 2b^3 \right) \quad (7)$$

$$+ \frac{3\varepsilon_2 \nu \alpha^2 k_w}{2m\gamma h^2} (1 - \varepsilon_1^2) (x_{pl}^2 + x_{pr}^2 + b^2)$$

### 2.2.1 Equations of motion for small rotations

The equations of motion of the system under the hypothesis of a small rotation of the foundation are obtained by applying the approximations:

$$\cos(\theta) \approx 1 \quad (8)$$

$$\sin(\theta) \approx \theta \quad (9)$$

Using equations (1), (2), (3), (4), (7), (8) and (9), with  $\varepsilon_2$  having the same definition as in Eq. (4).

These systems of ordinary differential equations which are highly nonlinear are multi-form. This is because of the conditions corresponding to equations (5), (6), (3) or (4) are not a priori known. Consequently, the numerical integration can be achieved only iteratively by guessing, for each iteration, the uplifting criterion (5).

## 3. Results and discussions

The foundation-mat system response was investigated in both cases of large and small rotations of the base under a scaled ground motion of the 1940 El Centro earthquake for both soil models: elastic and elastic-perfectly plastic.

The following parameters were fixed during simulations:  $h=12\text{m}$ ,  $b=12\text{m}$ ,  $m=105,07.10^3\text{kg}$ ,  $m_0 = 10507\text{Kg}$ ,  $\omega=2.08\text{Hz}$ ,

$$\xi=0.05, \alpha=4, \beta=8, \gamma=0.1, c = 21.85 \times 10^3 \text{ Kg.s}^{-1},$$

$k = 4.55 \times 10^5 \text{ N/m}$ ,  $k_w = 960 \times 10^6 \text{ N/m}$ , the yield stress of the soil  $\sigma_y = 1.5\text{Pa}$ .

Fig. 3 shows that the models E-LR and E-SR give almost the same results for time lesser that 21s, but when uplifting occurs at the time 21s this takes a long period in case of the model E-SR that for the model E-LR. Considering now, the elastic-plastic models P-LR and P-SR, at the beginning these two models give the same results. But, after the instant 6s the two responses are very dissimilar. The model P-LR shows large uplifting and large unilateral plastic flow, while the model P-SR shows limited uplifting with cyclic plastic flow.

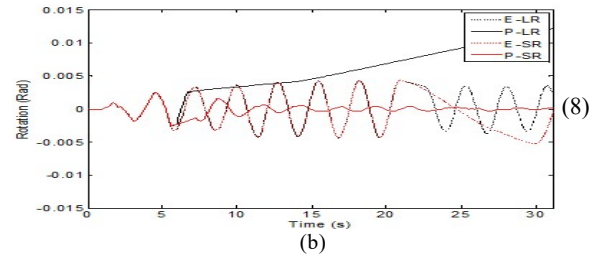
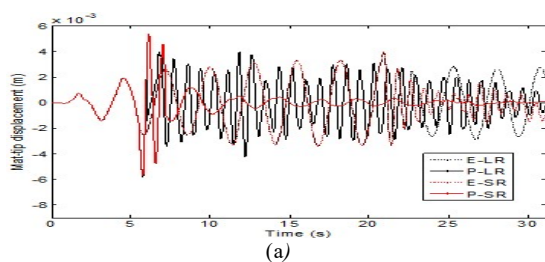


Fig. 3 Time variations under El Centro ground motion of: (a) mat-tip displacement; (b) base rotation; (E-SR) elastic soil analysis small rotations; (P-SR) elastic-perfectly plastic soil analysis small rotations; (E-LR) elastic soil analysis large rotations; (P-LR) elastic-perfectly plastic soil analysis large rotations

## 4. Conclusions

The dynamic effects caused by local uplift of base on the maximum response of a flexible structure which was taken to lay on a Saint-Venant like foundation was examined under the effects of large rotations or by considering only small rotations.

It can be seen from the obtained results that foundation uplifting and plasticity have a significant effect on the maximum values of mat-tip displacement and base rotation. Moreover, huge disparity was observed between the two cases: large and small rotations. This shows that the assumption of large rotations should be used when rocking of the construction is expected to take place.

The obtained results have shown also that soil plasticity should be considered in order to catch essential features of soil structure interaction taking place under seismic excitation.

## Références

- [1] G. Gazetas, *Seismic design of foundations and soil structure interaction*, Proceedings, First European Conference on Earthquake Engineering and Seismology, Geneva, Switzerland, 2006.
- [2] A.K Chopra, C.S. Yim, *Simplified earthquake analysis of structures with foundation uplift*, Structural Engineering ASCE 111(1985) 906-930.
- [3] X.C. Chen, Y.M. Lai, *Seismic response of bridge piers on elasto-plastic Winkler foundation allowed to uplift*, Sound and Vibration 266 (2003) 957-965.
- [4] C.Yue, Bo, C. Weizhen, *Elasto-Plastic Seismic Response of RC Continuous Bridge with Foundation-Pier Dynamic*, Interaction Advances in Structural Engineering 18 (2015).
- [5] N. El Abbas, A. Khamlichi, and M. Bezzazi, *Seismic response of foundation-mat structure subjected to local uplift*, Coupled System Mechanics 4 (2016)285-304.

# Coefficients de réflexion et de transmission des structures multicouches périodiques avec effet d'interface par le Pseudo-Formalisme de Stroh

J. Houyouk<sup>1a</sup>, J. A. Manyo Manyo<sup>1b</sup>, G. E. Ntamack<sup>1c</sup>, L. Azrar<sup>2,3d</sup>

<sup>1</sup>Groupe de Mécanique, Matériaux et Acoustique, Département de Physique, Université de Ngaoundéré, Cameroun

<sup>2</sup>Research Center STIS, Team M2CS, Department of Applied Mathematics and Informatics, ENSAM, Mohamed V University, Rabat, Morocco

<sup>3</sup>Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, King Abdulaziz University, Jeddah, Saudi Arabia

a- [jacobhouryouk@yahoo.com](mailto:jacobhouryouk@yahoo.com), b- [manyo.jacques@yahoo.fr](mailto:manyo.jacques@yahoo.fr), c- [guvedgar@yahoo.fr](mailto:guvedgar@yahoo.fr), d- [l.azrar@um5s.net.ma](mailto:l.azrar@um5s.net.ma)

## Résumé:

Les travaux présentés dans cette étude concernent la détermination des coefficients de réflexion et de transmission d'une structure multicouche périodique composée de N périodes dans le domaine de fréquences 0-5 MHz. Ces structures multicouches ayant une large gamme d'application, sont aussi utilisées pour la réduction des nuisances sonores. Notre période est constituée de deux plaques collées, l'une en aluminium et l'autre en polyéthylène. Nous prenons en compte l'effet d'interface des couches constituant la structure multicouche. L'atténuation des ondes longitudinales est prise en compte dans la couche de polyéthylène et négligée dans l'aluminium. Analytiquement, les coefficients de réflexion et de transmission sont obtenus par le pseudo-formalisme de Stroh.

**Mots clés:** structure multicouche, effet d'interface, coefficient de réflexion, coefficient de transmission, Pseudo-Formalisme de Stroh.

## 1. Introduction

Les nuisances engendrées par les bruits sont considérées comme une contrepartie négative d'une évolution technologique avec l'accroissement du machinisme. Devant l'extension du fléau, les efforts sont fournis pour maîtriser ce dernier. Les problèmes de bruit sont des questions majeures devant être prises en compte dans les bâtiments et les moyens de transport. Des recherches approfondies sont menées pour réduire le bruit à la source avec des résultats significatifs mais insuffisants par rapport aux besoins. Les moyens secondaires restent le dernier rempart, parmi ceux-ci nous avons les moyens passifs permettant d'utiliser les structures qui agissent directement par leurs propriétés mécaniques et acoustiques comme les isolants, les silencieux ou les écrans. Ainsi, pour connaître les propriétés de ces structures, des études ont été faites dans le but d'élaborer des nouvelles méthodes et techniques de calcul de la propagation d'ondes acoustiques basées sur les formulations mathématiques dans des milieux stratifiés. La première mise en équation est donnée par la méthode de la matrice de transfert [1, 2] qui s'intéresse à la résolution de l'équation d'onde dans les milieux stratifiés. Ayant la faculté de représenter naturellement la transmission des champs à travers les différentes couches [3], la matrice de

transfert présente des instabilités numériques lorsque l'épaisseur, le nombre des couches et la fréquence deviennent élevés. Cette instabilité a donné lieu à d'intenses travaux de recherche pour proposer des variantes de cette dernière. Nous avons ainsi la méthode de la matrice de raideur SMM (Stiffness Matrix Method), la méthode de série de Debye et d'autres encore. La SMM développée par Rokhlin et Wang [4,5] combine les avantages d'éviter les instabilités numériques et conserve une simplicité d'implémentation mais avec un temps de calcul comparable à celui de la matrice de transfert. Monnier *et al.* [6], utilisent une méthode hybride combinant le formalisme de Stroh et la SMM, et s'intéressent à l'évaluation du coefficient de réflexion dans les milieux multicouches anisotropes. Des travaux basés sur le Pseudo-Formalisme de Stroh ont été développés en mécanique dans les références [7,8]. Les travaux effectués jusqu'ici sur l'étude des propriétés de réflexion et transmission des structures multicouches périodiques ne tiennent pas compte de l'interface entre les couches. Nous proposons d'en tenir compte dans cette étude, en utilisant le pseudo-formalisme de Stroh.

## 2. Propagation dans une couche monoclinique

L'équation du mouvement des structures multicouches en l'absence des forces de volume est donnée par :

$$\sigma_{ij,j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1)$$

Où  $u_i$  sont les déplacements,  $\rho$  la densité et  $\sigma_{ij}$  les contraintes. La loi de Hooke donne :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \text{ et } \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

Avec  $\sigma_{ij}$ ,  $c_{ijkl}$  et  $\varepsilon_{kl}$  respectivement les contraintes, les coefficients élastiques et les déformations.  $u_i$  désigne les déplacements suivant la direction  $i$ .

Les solutions générales des déplacements sont [9] :

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = e^{(sz+iat)} \begin{pmatrix} a_1 \cos(px) \sin(qy) \\ a_2 \sin(px) \cos(qy) \\ a_3 \sin(px) \sin(qy) \end{pmatrix} \quad (3)$$

### 2.1- Interface imparfaite

Parmi les modèles d'interface connus, nous avons choisi d'utiliser le modèle linéaire du type ressort avec continuité



des tractions et discontinuité des déplacements entraînant des glissements [9].

## 2.2 Pseudo-formalisme de Stroh

Partant de l'équation (2) et en négligeant les forces de volume, l'équation du mouvement s'écrit sous forme d'équation aux valeurs propres suivante :

$$\left[ Q_0 + s(R_0 - R_0^t) + s^2 T_0 \right] a = 0 \quad (4)$$

$$\text{Où : } \begin{cases} Q_0 = - \begin{bmatrix} (p^2 c_{11} + q^2 c_{66}) & pq(c_{66} + c_{12}) & 0 \\ pq(c_{66} + c_{12}) & (p^2 c_{66} + q^2 c_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & (p^2 c_{55} + q^2 c_{44}) \end{bmatrix} + \rho \omega^2 I_3 \\ R_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & pc_{13} \\ 0 & 0 & qc_{23} \\ -pc_{55} & -qc_{44} & 0 \end{bmatrix} \\ T_0 = \begin{bmatrix} c_{55} & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5)$$

Les valeurs et vecteurs propres sont reliés par :

$$b = (sT_0 - R_0^t) a$$

Avec :

$$a = [a_1, a_2, a_3]^t \text{ et } b = [b_1, b_2, b_3]^t$$

La combinaison de (4) et (6) conduit au système suivant :

$$N \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (7)$$

Avec :

$$N = \begin{bmatrix} T_0^{-1} R_0^t & T_0^{-1} \\ -Q_0 - R_0 T_0^{-1} R_0^t & -R_0 T_0^{-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Où  $N$  est la matrice fondamentale de pseudo-formalisme de Stroh. Nous obtenons alors un problème de valeurs propres et sa résolution a été donnée par Pan et Heyliger [10-12] pour l'analyse des structures magnéto-électro-élastiques.

## 2.3 Matrice de propagation et solution dans le multicouche

La solution d'une surface suffit pour propager la solution dans la structure multicouche entière. Dans une couche  $j$ , la solution est donnée par:

$$\begin{bmatrix} u \\ t \end{bmatrix}_{z_j} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{bmatrix} \langle e^{sz_j} \rangle \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Où :

$$A_1 = [a_1, a_2, a_3], A_2 = [a_4, a_5, a_6]$$

$$B_1 = [b_1, b_2, b_3], B_2 = [b_4, b_5, b_6]$$

$$\langle e^{sz} \rangle = \text{diag} [e^{s_1 z_1}, e^{s_2 z_2}, e^{s_3 z_3}, e^{s_4 z_4}, e^{s_5 z_5}, e^{s_6 z_6}]$$

A l'interface  $j-1$  nous avons:

$$\begin{bmatrix} u \\ t \end{bmatrix}_{z_{j-1}} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{bmatrix} \langle e^{sz_{j-1}} \rangle \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

Des Equations (9) et (10), nous obtenons:

$$\begin{bmatrix} u \\ t \end{bmatrix}_{z_{j-1}} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{bmatrix} \langle e^{sz_{j-1}} \rangle \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u \\ t \end{bmatrix}_{z_j} = P_j(h_j) \begin{bmatrix} u \\ t \end{bmatrix}_{z_j} \quad (11)$$

Avec  $h_j = z_{j-1} - z_j$

Le modèle linéaire d'interface permet d'écrire :

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix}_{z_{j+1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha_1^{(j)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha_2^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha_3^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix}_{z_j} = T_k \begin{bmatrix} u \\ t \end{bmatrix}_{z_j} \quad (12)$$

Avec  $\alpha_1^{(j)} = \alpha_2^{(j)} = \alpha_3^{(j)} = k_j \frac{H}{c_{33}^{(j)}}$ ,  $k_j$  le paramètre d'interface.

La solution du système multicouche est donc donnée par:

$$\begin{bmatrix} u \\ t \end{bmatrix}_{z=H} = \left( \prod_{j=2}^{N_h} P_j(h_j) \Omega_k \right) P_1(h_1) \begin{bmatrix} u \\ t \end{bmatrix}_{z=0} \quad (13)$$

(6) Les coefficients de réflexion et de transmission acoustiques sont reliés à la matrice de souplesse extraite de la matrice de propagation globale par [4,13-15]:

$$[S] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_{21}^{-1} P_{22} & P_{21}^{-1} \\ P_{12} - P_{21}^{-1} P_{11} P_{22} & P_{21}^{-1} P_{11} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Nous obtenons les coefficients de réflexion  $R_d$  (direct) et  $R_r$  (reverse) et de transmission  $T$  qui s'expriment en fonction des éléments (exposants) des sous-matrices (indices) de la matrice globale de flexibilités  $S^N$  :

$$\begin{cases} R_d = \frac{(s_{11} - y_f)(s_{22} - y_f) + (s_{12})^2}{(s_{11} + y_f)(s_{22} - y_f) + (s_{12})^2} \\ R_r = \frac{(s_{11} + y_f)(s_{22} + y_f) + (s_{12})^2}{(s_{11} + y_f)(s_{22} - y_f) + (s_{12})^2} \\ T = \frac{2y_f s_{12}}{(s_{11} + y_f)(s_{22} - y_f) + (s_{12})^2} \end{cases} \quad (15)$$

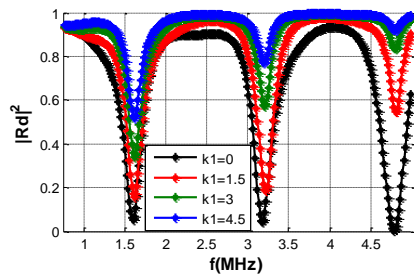
## 3-Résultats et discussions

Les courbes des coefficients de réflexion et de transmission de la structure multicouche périodique constituée de l'aluminium (AL) et du polyéthylène (PE) avec et sans interface sont tracées. Les caractéristiques de chaque couche de la période sont résumées dans le Tableau 1. Lorsque l'atténuation dans la couche de PE est prise en compte, les coefficients de réflexion diffèrent selon le côté d'insonation et la transmission reste identique. Nous présentons les courbes pour une période (N=1) avec l'effet d'interface.

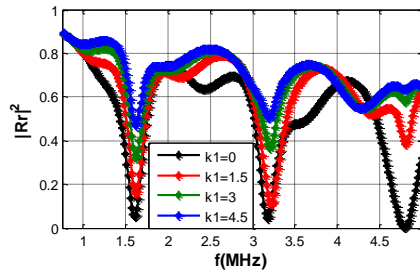
**Tableau 1 :** Propriétés des plaques constituant la période

Milieu	$c_{11} = c_{22} = c_{33}$ (GPa)	$c_{12} = c_{13} = c_{23}$ (GPa)	$c_{44} = c_{55} = c_{66}$ (GPa)	$d$ (mm)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
AL	113.9	60.15	26.9	2	2800
PE	5.28	2.57	1.35	1	940

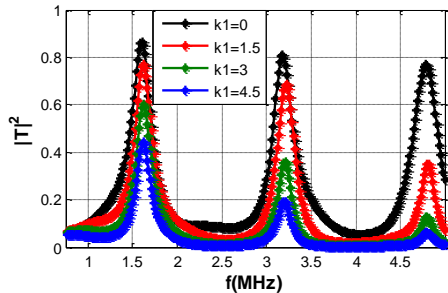
$c_{ij}$ : modules élastiques,  $d$ : épaisseur,  $\rho$ : densité



**Figure 1 :** Réflexion direct (AL/PE) avec  $k_1 = (0 ; 1.5 ; 3 ; 4)$



**Figure 2 :** Réflexion inverse (PE/AL) avec  $k_1 = (0 ; 1.5 ; 3 ; 4)$



**Figure 3 :** Transmission (AL/PE) avec  $k_1 = (0 ; 1.5 ; 3 ; 4)$

Dans les deux configurations AL/PE et PE/AL, l'amplitude des coefficients de réflexion augmente avec les paramètres d'interface. Cependant, dans les deux cas, nous avons quatre minima régulièrement espacés et qui tendent vers zéro. Le coefficient de transmission quant à lui ne dépend pas du côté d'insonation. Lorsque le paramètre d'interface augmente, l'amplitude diminue et décroît de façon considérable lorsque la fréquence augmente. Le formalisme présenté est bien applicable dans les multicouches qui peuvent être considérées comme des plaques en appui simple. Ce formalisme prend en compte les effets d'interface qui sont des paramètres très importants de conception des structures.

#### 4-Conclusion

La détermination des coefficients de réflexion et de transmission requiert la modélisation de la propagation des ondes acoustiques dans ces milieux. Dans ce travail, nous avons développé la prise en compte de l'effet d'interface par le formalisme de Stroh. Il ressort de cette étude que l'effet d'interface améliore la capacité de réflexion et entraîne une faible transmission des ondes acoustiques. La prise en compte des interfaces améliore la performance acoustique des structures multicouches. Une étude expérimentale est envisagée pour une application dans la réduction des nuisances sonores.

#### Références

- [1]-W. T. Thomson, Transmission of elastic waves through a stratified solid medium, *Journal of applied Physics*, 1950, 89-93.
- [2]-N. A. Haskell, The dispersion of the surface waves on Multilayered Media, *B. Seismol. Soc. Am*, 1953, 377-393.
- [3]-E. L. Adler. Saw and pseudo-saw properties using matrix methods. *IEEE Ultrasonics Transactions, Ferroelectric Frequency Control*, 1994, 876–882.
- [4]-S. I. Rokhlin, L. Wang, Ultrasonic waves in layered anisotropic media: characterization of multidirectional composites, *International Journal of Solids & Structures*, 2002, 5529-5545.
- [5]-S. I. Rokhlin, L. Wang, A compliance/stiffness matrix formulation of general Greens function and effective permittivity for piezoelectric multilayers, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr.*, submitted, 2003.
- [6]-T. Monnier, X. Deng, P. Guy, N.A. Ismaili, Caractérisation non destructive des matériaux à gradient de fonctionnalité par microscopie acoustique, *CFA 2014 Poitiers*, 2014, 507-513.
- [7]-M. Ajdour and L. Azrar, Analytical solutions of loaded multifunctional multilayered plates, *Advanced Materials Research*, 2013, 127-134.
- [8]-J. Chen, J. Guo, E. Pan, Reflection and transmission of plane wave in multilayered nonlocal magneto-electro-elastic plates immersed in liquid. *Composites Structures*, 2017, 401-410.
- [9]-X. Wang, E. Pan, Exact solutions for simply supported and multilayered piezothermoelastic plates with imperfect interfaces, *The Open Mechanics Journal*, 2007, 1-10.
- [10]-E. Pan, F. Han, Exact solution for functionally graded and layered magneto-electro-elastic plates. *International Journal of Engineering Science*, 2005, 321-339.
- [11]-M. Ajdour, A. Bakkali, L. Azrar and A. El Omri, Modeling and analysis of loaded multilayered magneto-electro-elastic structures composite materials: Applications. *Advanced Electromagnetics*. 2016.
- [12]-E. Pan and P. R. Heyliger, Free vibrations of multilayered magneto-electro-elastic plates, *J. Sound Vib.*, 2002, 429–442.
- [13]-P. Marechal, O. Lenoir. Effet de déperiodisation dans une structure multicouche plane viscoélastique: expérience et simulation. *Société Française d'Acoustique - SFA. 10ème Congrès Français d'Acoustique*, Apr (2010), Lyon, France. 2010.
- [14]-E. Siryabe, G. E. Ntamack, P. Marechal, Holes effects in plane periodic multilayered viscoelastic media, *Open Journal of Acoustics*, 2013, 80-87.
- [15]-P. Maréchal, O. Lenoir, A. Khaled, M. E. C. ElKettani, D. Chenouni; Viscoelasticity Effect on a Periodic Plane. *Medium Immersed in Water, Acta Acustica United with Acustica*, 2014, 1036–1043.

## Courbe de dispersion d'un composite graphite-époxy par une méthode analytique hybride

### Dispersion curves of composite graphite-epoxy by a hybrid analytic method

I. ZITOUNI<sup>1</sup>, H. RHIMINI<sup>1</sup> and A. CHOUAF<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Mécanique, d'Ingénierie et d'Innovation (LM2I), ENSEM, UH2C, Casablanca, Maroc  
[ismaine.zitouni.doc20@ensem.ac.ma](mailto:ismaine.zitouni.doc20@ensem.ac.ma), [h.rhimini@ensem.ac.ma](mailto:h.rhimini@ensem.ac.ma), [a.chouaf@ensem.ac.ma](mailto:a.chouaf@ensem.ac.ma)

#### Abstract

In recent years, graphite/epoxy materials have been widely used in the space industry due to their ability to satisfy design demands (minimum weight and high structural rigidity). However, radiation resulting from the space environment can create imperfections in these structures. The ultrasonic non-destructive testing by guided wave presents an alternative for the detection of these defects. The knowledge of the dispersion curves is an essential step in order to know the adequate frequencies susceptible to propagate in our material for a successful control. In this manuscript, we present a hybrid analytical method to plot the dispersion curves of a graphite-epoxy composite material. The advantage of this method over the classical analytical methods has been studied. The accuracy of the obtained results is controlled using the DISPERSE software.

#### Résumé

Ces dernières années les matériaux graphite/époxy ont connus une grande utilisation dans le domaine spatial grâce à leurs capacités à répondre aux exigences de conception (poids minimal et rigidité structurelles élevée). Néanmoins les radiations dû à l'environnement spatial peuvent créer des imperfections dans ces structures. Le Contrôle Non-Destructif par Onde Guidée Ultrasonore (OGU) présente une alternative pour la détection de ces défauts. La connaissance des courbes de dispersion est une étape primordiale afin de déterminer les modes adéquats susceptibles de se propager dans notre matériau lors d'un bon control. Dans ce manuscrit, nous présentons une méthode analytique hybride pour le traçage des courbes de dispersion d'un matériau composite graphite-époxy. L'avantage de cette méthode par rapport aux méthodes analytiques classiques a été étudié. L'exactitude des résultats obtenus a été contrôlée à l'aide du logiciel DISPERSE.

**Mots clefs:** *Ondes guidées ultrasonores, courbe de dispersion, composite graphite/époxy, méthode analytique hybride*

**Keywords:** *Ultrasonic guided waves, dispersion curve, graphite/epoxy composite, hybrid analytical method*

#### 1. Introduction

Les structures aéronautiques sont toujours soumises à des sollicitations causées par les radiations issues de l'environnement spatial et l'oxygène atomique [1]. La nécessité d'un choix de matériau est fondamentale pour avoir une bonne fonctionnalité et une longue durée de vie des pièces aéronautiques et éviter des catastrophes spatiales. Les matériaux composites graphite époxy ont pu répondre à tous ces exigences. Elles ont été utilisées pour réduire les distorsions thermiques et contrôler les effets du rayonnement solaire. De plus ce type de matériau est caractérisé par une rigidité structurelle élevée tout en ayant un faible poids [1,2].

Malgré tous ces avantages, la non adhésion entre les fibres et la matrice et l'atmosphère spatiale peuvent entraîner l'apparition d'imperfections non détectable dans certains cas.

Le contrôle non destructif par Ondes Guidées Ultrasonores (OGU) présente un outil avantageux pour la détection de ces défauts. Effectivement les OGU ont la faculté de générer une vibration de toute la pièce tout en ayant une grande distance de propagation. La connaissance des courbes de dispersion est une phase majeure dans le contrôle ultrasonore. Ces dernières nous permettent de connaître les modes aptes à se propager dans la pièce pour une bonne détection des défauts. L'étude des courbes de dispersion a été largement développée par plusieurs méthodes. Les méthodes analytiques de recherche de zéro appliquées aux équations caractéristiques ont été les premiers à être utilisées pour l'obtention de ces courbes [3,4]. Néanmoins le temps de calcul et le grand nombre d'itérations restent des limites importantes pour ces méthodes. Plusieurs autres méthodes ont été introduites par la suite comme la méthode semi analytique [5,6], la méthode spectrale [7,8], les méthodes basées sur le polynôme de Legendre [9,10] et aussi les méthodes de matrices (TMM : Transfer Matrix Method, GMM: Global Matrix Method et SSTM: Stable Transfer Matrix Method[11,12]).

Dans cet article, nous introduisons une méthode analytique hybride pour le traçage des courbes de dispersion du matériau composite graphite-époxy. Nous comparons nos courbes avec celles fournies par le logiciel Disperse [11], considéré comme le leader dans le domaine du CND par OGU. Une parfaite concordance des résultats des deux

techniques a été observée de plus que notre méthode hybride nous a permis d'avoir des courbes de dispersion au voisinage des fréquences de coupure des modes d'ordre supérieur.

## 2. Théorie des ondes guidées

Nous considérons la propagation des ondes guidées dans une plaque orthotrope d'épaisseur  $e = 2h$  suivant la direction  $x_1$ . La plaque est considérée libre en contraintes c'est à dire les contraintes  $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{13}$ , et  $\sigma_{23}$  sont nulles aux interfaces supérieure et inférieure. L'annulation de ces contraintes conduit à un système de 6 équations sur les amplitudes  $U_{ij}$  ( $i = 1, j = 1 \dots 6$ ). Ce système est comme suite [13] :

$$[D]_{(6,6)} \{U_{ij}\}_{(6,1)} = \{0\}_{(6,1)} \quad (1)$$

Les solutions non triviales sont issues de l'annulation du déterminant de ce système.

Les composantes de la matrice  $D$  s'écrivent en fonction des constantes d'ingénierie ( $E_i$  : modules de Young,  $G_{ij}$  : modules de cisaillement,  $\nu_{ij}$  : coefficients de Poisson (TABLEAU I)), de la fréquence  $f$ , du nombre d'onde  $k$  et de la masse volumique  $\rho$ .

## 3. Méthode hybride

Les algorithmes de recherche de zéros d'une fonction présentent l'avantage d'être robustes est sont souvent convergent. L'une de ces méthodes analytiques est la méthode de bisection qui a été utilisée avec succès pour tracer les courbes de dispersion de plusieurs matériaux isotropes et anisotropes [3]. Mais cette méthode trouve des problèmes pour les structures multicouches, de plus le temps de calcul de cette méthode est très élevé. La méthode de Newton-Raphson [4] permet aussi l'obtention de ces courbes, cette dernière présente un très grand gain en temps par rapport à la méthode de dichotomie mais elle trouve des problèmes pour l'obtention de toutes les racines à cause de la faible approximation des valeurs initiales. La méthode hybride que nous présentons dans ce papier vient pour compenser les limites de ces deux méthodes. Pour notre cas, on cherche à trouver le couple fréquence-nombre d'onde ( $f, k$ ) qui permettent l'annulation des équations de dispersion des OGU de la plaque composite. Pour cela nous fixons tout d'abord le nombre d'onde et nous effectuons notre recherche sur une plage de fréquence, à chaque fois que les équations caractéristiques changent de signe nous appliquons la méthode de bisection pour réduire l'intervalle où est présumer la racine, ensuite nous appliquons la méthode de Newton pour profiter de sa vitesse de convergence jusqu'à ce que la solution ne diffère plus de la précédente à un  $\epsilon$  près ( $|f_i - f_{i-1}| \leq \epsilon$ ). L'étude étant développée pour une valeur de  $k$  fixée, nous réitérons la même procédure pour toute la plage du nombre d'onde.

## 4. Courbes de dispersion du composite graphite-époxy

Pour notre application, nous avons considéré une plaque composite en graphite-époxy d'épaisseur  $e = 4\text{mm}$  et de densité  $\rho = 1600\text{ Kg/m}^3$ , les caractéristiques mécaniques de ce dernier sont données dans le tableau I avec les modules de Young et de cisaillement sont en GPa. Pour plus de détails, voir les références [13-14].

TABLEAU I. Propriétés mécanique d'une plaque composite graphite époxy [14]

Modules d'Young			Modules de cisaillement			Coefficients de Poisson		
$E_1$	$E_2$	$E_3$	$G_{12}$	$G_{13}$	$G_{23}$	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$
154.25	14.72	14.72	7.46	5.82	32	0.18	0.18	0.26

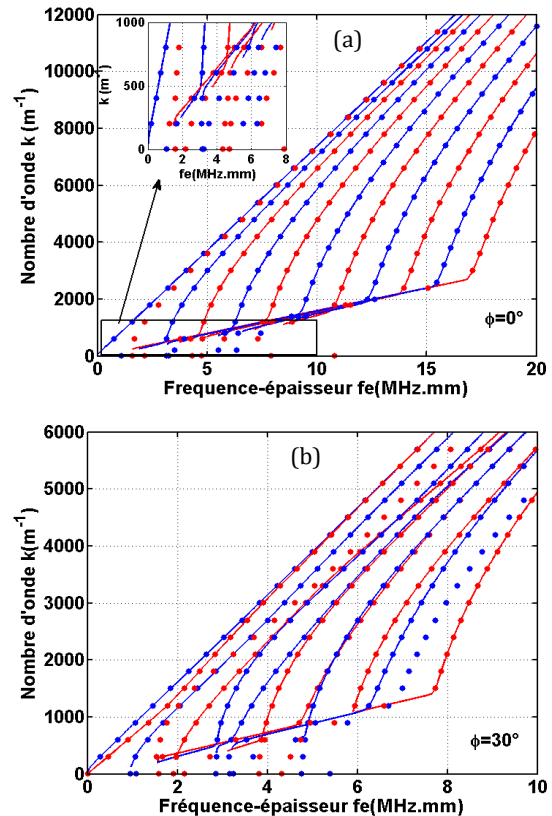
Nous prenons les plages du nombre d'onde et de la fréquence comme suit :

$$k = 10^{-5} : 100 : 12000 \text{ (m}^{-1}\text{)}$$

$$f = 10 : 50 : 6 \cdot 10^6 \text{ (Hz)}$$

La figure 1 illustre les courbes de dispersion des 12 premiers modes du composite graphite-époxy dans le plan ( $fe, k$ ) pour des valeurs de 0, 30, 45 et 90 degrés de l'angle  $\phi$  qui lie le repère global à celui de référence. Les courbes produites par la méthode hybride sont comparées à celles obtenues par le logiciel DISPENSE.

La précision évaluée entre les résultats obtenus par la méthode hybride et celle du logiciel DISPENSE et de l'ordre de  $10^{-4}$ , ce qui montre l'exactitude des solutions obtenues par la méthode hybride. Nous observons que cette dernière a réussi à bien définir les 12 premiers modes dans tout l'intervalle du nombre d'onde ce qui n'est pas le cas du logiciel DISPENSE qui trouve des problèmes pour générer le mode  $S_0$  (à 0 et 90 degrés) ainsi qu'à définir complètement les modes pour des valeurs très petites du nombre d'onde.



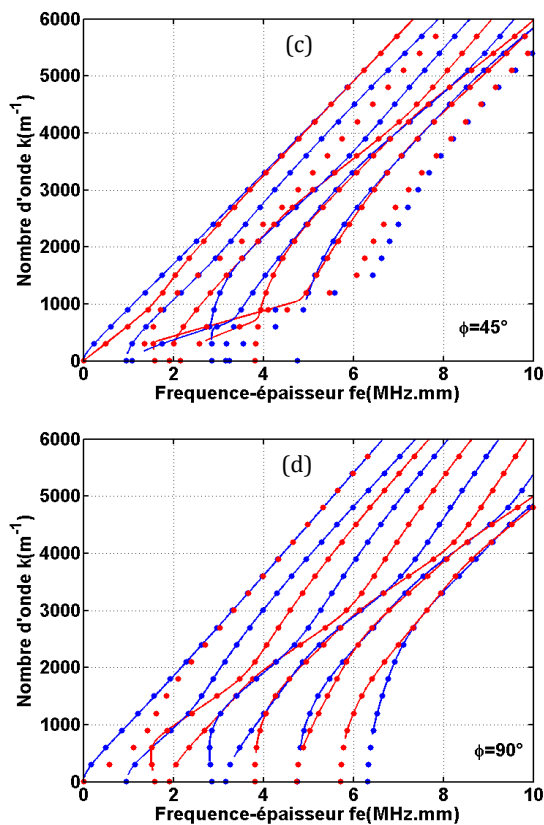


Fig. 1 Courbes de dispersion dans le plan  $(f, k)$  tracées par la méthode hybride (cercles plein) et le logiciel Disperse (Traits continus) pour des angles  $0^\circ$  (a),  $30^\circ$  (b),  $45^\circ$  (c) et  $90^\circ$  (d).

TABLEAU II. Comparaison du temps de calcul entre les méthodes analytiques pour l'obtention des 12 premiers modes

Méthode	Bissection	Newton	Hybride
Temps de calcul (s)	1481	1068	927

Dans le tableau II nous avons reporté le temps de calcul des méthodes de Bissection, de Newton et hybride pour le cas d'une plaque composite graphite-époxy à  $\phi = 0$  degrés (l'intervalle de fréquence est  $10:50:6 \cdot 10^6$  (Hz), l'intervalle des nombres d'ondes est  $10^{-5}:100:12000$  ( $m^{-1}$ )). A partir du tableau II, nous remarquons que le temps de calcul de notre méthode est largement plus petit par rapport aux autres méthodes classiques. De plus, grâce à elle, nous arrivons à détecter tous les modes existant dans l'espace de recherche de zéros et plus particulièrement au voisinage des fréquences de coupure de ces modes. Ce qui prouve la rapidité et la fiabilité de notre méthode à déterminer les courbes de dispersion d'un matériau composite avec différents degrés d'anisotropie.

## 5. Conclusion

La méthode hybride offre un moyen très compétitif pour le traçage des courbes de dispersion d'un matériau composite graphite-époxy pour différents degrés d'anisotropie (comportement isotrope transverse pour des angles de 0 et 90 degrés ainsi qu'un comportement monoclinique pour des angles de 30 et 45 degrés). Cette dernière compense les limites des méthodes de bissection (lenteur) et de la méthode de Newton Raphson (saut de racine). Ajoutant à

cela un gain en temps de calcul considérable. En la comparant avec le logiciel DISPERSER, la méthode hybride a su détecter même les modes proches des fréquences de coupures, ce qui n'est pas le cas pour le logiciel DISPERSER.

## Références

- [1] Lukez, R. (1987). The use of graphite/epoxy composite structures in space applications.
- [2] Mayer, N. J. (1974). Carbon composites in space vehicle structures.
- [3] Vinay Dayal and Vikram K Kinra. Leaky lamb waves in an anisotropic plate. i: An exact solution and experiments. The Journal of the Acoustical Society of America, 85(6):2268–2276, 1989.
- [4] Neau, G. (2003). Ondes de Lamb dans des plaques anisotropes viscoélastiques: étude des fronts d'onde et atténuation (Doctoral dissertation, Bordeaux 1).
- [5] Seyfaddini, F., Nguyen-Xuan, H., & Nguyen, V. H. A semi-analytical isogeometric analysis for wave dispersion in functionally graded plates immersed in fluids. Acta Mechanica, 232(1), 15-32. (2021).
- [6] Darun Barazanchy and Victor Giurgiutiu. A comparative convergence and accuracy study of composite guided-ultrasonic wave solution methods: Comparing the unified analytic method, safe method and disperse. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 231(16):2961–2973, 2017.
- [7] ATI Adamou and RV Craster. Spectral methods for modelling guided waves in elastic media. The Journal of the Acoustical Society of America, 116(3):1524–1535, 2004.
- [8] Quintanilla, F. H., Lowe, M. J. S., & Craster, R. V. (2015). Modeling guided elastic waves in generally anisotropic media using a spectral collocation method. The Journal of the Acoustical Society of America, 137(3), 1180-1194.
- [9] Zheng, M., He, C., Lu, Y., & Wu, B. (2018). State-vector formalism and the Legendre polynomial solution for modelling guided waves in anisotropic plates. Journal of Sound and Vibration, 412, 372-388.
- [10] Zheng, M., He, C., Lyu, Y., & Wu, B. (2019). Guided waves propagation in anisotropic hollow cylinders by Legendre polynomial solution based on state-vector formalism. Composite Structures, 207, 645-657.
- [11] Brian Pavlakovic, Mike Lowe, David Alleyne, and Peter Cawley. Disperse A general purpose program for creating dispersion curves. In Review of progress in quantitative nondestructive evaluation, pages 185–192. Springer, 1997.
- [12] Kamal, A. M., Gresil, M., & Giurgiutiu, V. (2013). Comparative study of several methods for the calculation of ultrasonic guided waves in composites. In 54th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference (p. 1901).
- [13] Nayfeh, A. H. (1995). Wave propagation in layered anisotropic media: With application to composites. Elsevier.
- [14] Nayfeh, A. H., & Chimenti, D. E. (1989). Free wave propagation in plates of general anisotropic media.

## Numerical modeling of the nonlinear dynamic behavior of a helical beam with circular cross-section

F. BOUSSAOUI<sup>1\*</sup>, H. LAHMAM<sup>1</sup>, B. BRAIKAT<sup>1</sup>,

1. Laboratoire d'Ingénierie et Matériaux LIMAT, Faculté des Sciences Ben M'Sik, Hassan II University of Casablanca, B.P 7955 Sidi Othman, Casablanca, Morocco  
Email: fatima.boussaoui1@gmail.com Tel : +212 614454112

### Abstract:

In this work, we are interested in the numerical modeling of the dynamic response of a helical beam of circular cross section, taking into account the geometric non-linearity. For this purpose, we propose an implicit high-order algorithm based on the Taylor series development, the finite element method, the implicit Newmark scheme and the homotopy technique. The kinematics adopted in this model is based on the hypotheses of Timoshenko and Saint-Venant. In order to study the influence of the geometrical nonlinearity on the vibrational behavior of the studied beam, we consider a helical spring subjected to a dynamic loading of sinusoidal type.

**Keywords :** *Helical spring, Non-linear dynamic analysis, High order implicit model.*

### 1 Introduction

Curvilinear structures are commonly used in various fields such as civil engineering etc. Among these structures, we find the helical springs which play an important role in the functioning of certain mechanisms such as machines, brakes, clutches etc. It would therefore be interesting to study the influence of all the effects that affect their dynamic behavior such as physical and geometrical nonlinearities, manufacturing defects such as cracks etc. In the literature, we find several research works concerning the study of the free or forced vibration of this type of springs while being limited to the linear case. Pearson [1] used a transfer matrix method for the analytical calculation of the first natural frequencies of a helical spring with different types of boundary conditions. Xiong and Tabarrok [2] used a curvilinear finite element with twelve degrees of freedom to compute the natural frequencies of a helical spring. Taktak and al [3] and Chen and al [4] presented a dynamic study of coil springs based on the finite element method. In a recent article Boussaoui and al [5], proposed a high order model for the nonlinear elastic calculation of helical structures in the static case by adopting the formulation used in the work [4].

We propose in this work to extend the application of the high order model [5] to the nonlinear dynamics of helical structures. The new model also includes the implicit

Newmark scheme and the homotopy technique. This numerical approach is applied to a helical spring subjected to a dynamic loading for the calculation of displacements and rotations in the mean line of this mechanical element. The results thus obtained are compared with those calculated in the linear case.

### 2 Modeling the nonlinear dynamics

#### 2.1 Displacement field

Using the hypotheses of Timoshenko and Saint-Venant [3], the components of the displacement vector at a point  $P$  of the cross section are written in the Frenet reference frame  $R_F$  as follows:

$$\begin{cases} U_1(s, X_2, X_3) = u(s) - X_2\theta^3(s) + X_3\theta^2(s) \\ U_2(s, X_2, X_3) = v(s) - X_3\theta^1(s) \\ U_3(s, X_2, X_3) = w(s) + X_2\theta^1(s) \end{cases} \quad (1)$$

where  $X_2$  and  $X_3$  are respectively the local coordinates along the normal directions  $\vec{n}$  and  $\vec{b}$  to the mean line.  $u(s), v(s), w(s), \theta^1(s), \theta^2(s)$  and  $\theta^3(s)$  are the displacements and rotations at a point  $M$  of the mean line.

#### 2.2 Green-Lagrange strains vector

The Green-Lagrange deformation tensor is represented in the Frenet frame by the following column matrix :

$$\{\gamma\} = \frac{1}{1-\rho_1 X_2} \left\{ \begin{pmatrix} e_{t1} + X_2 X_3 \chi_{bn1} + X_2^2 X_3 \chi_{bn4} + \\ X_2^2 e_{t3} - X_2 \chi_b + X_3 \chi_n + \\ X_3^2 e_{t2} + X_2^3 \chi_{bn2} + X_2 X_3 \chi_{bn3} \\ \gamma_{tn} + X_2 \chi_{t1} - X_3 \chi_{t2} \\ \gamma_{tb} + X_2 \chi_{t3} + X_3 \chi_{t4} \end{pmatrix} \right\} \quad (2)$$

where  $e_{t1}, e_{t2}$  and  $e_{t3}$  are the membrane deformations,  $\chi_{t1}, \chi_{t2}, \chi_{t3}$  and  $\chi_{t4}$  are the deformations in the plane  $(X_2, X_3)$ ,  $\chi_n$  and  $\chi_b$  are respectively the deformations in the planes  $(s, X_3)$  and  $(s, X_2)$ ,  $\gamma_{tn}$  and  $\gamma_{tb}$  are the transverse strains given by [5].

#### 2.3 Variational formulation

The variational formulation of the studied problem is obtained by applying the principle of virtual works, that is :

$$\delta T + \delta W_d - \delta W_{ext} = 0 \quad (3)$$

where  $\delta T$  is the virtual work of the acceleration quantities,  $\delta W_d$  is the virtual elastic strain energy and  $\delta W_{ext}$  is the virtual work of the external forces. The formulation (3) and the local behavior law can be written in the following matrix form:

$$\begin{cases} \rho \int_L \langle \delta U \rangle [m] \{\ddot{U}\} ds + \int_L \langle \delta \theta \rangle ({}^t [H] \\ + {}^t [A(\{\theta\})] S) ds - \int_{\partial L} \langle \delta U \rangle \{F_{ext}\} = 0 \\ \{S\} = [D] ([H] + \frac{1}{2} [A(\{\theta\})]) \{\theta\} \end{cases} \quad (4)$$

$\{S\}$  is the vector of generalized constraints [5],  $[m]$  is the elementary mass matrix [4],  $[H]$  is a constant matrix that depends on the radii of curvature of the mean line,  $[A(\theta)]$  is a matrix that depends on the displacement gradient,  $\{\theta\}$  is the generalized displacement gradient vector [5] and  $L$  being the length of the mean line. with :

$\langle \delta U \rangle = \langle \delta u, \delta v, \delta w, \delta \theta^1, \delta \theta^2, \delta \theta^3 \rangle$   
 $\langle \ddot{U} \rangle = \langle \ddot{u}, \ddot{v}, \ddot{w}, \ddot{\theta}^1, \ddot{\theta}^2, \ddot{\theta}^3 \rangle$

### 3 Resolution strategy

#### 3.1 Discretization of the mean line

The discrete form associated with problem 4 is obtained by applying the assembly technique in the framework of the finite element method, that is:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K(\{q\})] \{q\} = \{F\} \quad (5)$$

where  $\{q\}$  is the global unknown vector and  $[K(\{q\})]$  is a matrix that depends on the vector  $\{q\}$ .

The finite element used for the discretization of the mean line of the studied spring is characterized by twelve degrees of freedom.

#### 3.2 Temporal discretization

To solve the nonlinear problem (5), we use the Newmark time scheme. For this purpose, we consider the following change of variable :

$$\{q^{k+1}\} = \{q^k\} + \{\Delta q\}$$

The problem (5) is thus written at the iteration  $k$ :

$$[K_t^k] \{\Delta q\} + \{FQ(\{\Delta q\}, \{\Delta q\})\} = \{S^k\} \quad (6)$$

where  $[K_t^k]$  is the tangent matrix evaluated at time  $t^k = k\Delta t$ ,  $\Delta t$  is the time increment,  $\{FQ(\{\Delta q\}, \{\Delta q\})\}$  is a quadratic form and  $\{S^k\}$  is the second member vector.

#### 3.3 Homotopic transformation

In order to avoid the inversion of the tangent matrix at each time step, we consider the following artificial

problem[6]:

$$[K^*] \{\Delta Q\} + a ([K_t^k] - [K^*]) \{\Delta Q\} + \{FQ(\{\Delta Q\}, \{\Delta Q\})\} = a \{S^k\} \quad (7)$$

where  $[K^*]$  is an arbitrary matrix, 'a' is a dimensionless parameter and  $\{\Delta Q\}$  is that satisfies the following conditions:

$$\{\Delta Q\} = \{0\} \text{ if } a = 0 \text{ and } \{\Delta Q\} \equiv \{q\} \text{ if } a = 1$$

#### 3.4 Development in Taylor series

The unknown of problem (7) is sought in the form of a Taylor series development with respect to the parameter 'a', that is :

$$\{\Delta Q\} = \sum_{i=1}^p a^i \{\Delta Q_i\} \quad (8)$$

$p$  being the order of truncation of the series.

By injecting this development (8) in the artificial problem (7) and by identifying term by term the coefficients according to the powers of the parameter 'a', we obtain a succession of linear problems given by :

$$\begin{cases} [K^*] \{\Delta Q_1\} = \{S^k\}; p = 1 \\ [K^*] \{\Delta Q_i\} = ([K^*] - [K_t^k]) \{\Delta Q_{i-1}\} + \{F_i^{nl}\}; \\ 2 \leq i \leq p \end{cases} \quad (9)$$

where  $\{F_i^{nl}\}$  is a vector that depends on solutions of orders lower than  $i$ .

#### 3.5 Continuation procedure

In order to obtain the complete solution curve of the nonlinear problem (5), we apply the continuation technique based on the determination of the radius of convergence of each asymptotic branch. The radius of convergence of the series (8) is given by the following shift criterion[7]:

$$a_{max} = \left( \epsilon \frac{\|\{\Delta Q_1\}\|}{\|\{\Delta Q_p\}\|} \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (10)$$

### 4 Results and discussion

In this application, we consider a thin helical spring of constant circular section, whose geometrical and mechanical characteristics are identical to those used in [3]. One of the ends of this spring is embedded, the other end being subjected to a sinusoidal force parallel to the axis of the spring considered Figure 1 and which is given by the law where  $\omega$  is chosen here as the first pulse in the linear case, or  $\omega = 59.5 \text{ rad/s}$ . In this application, we used as control parameters in the high order algorithm ;

the order of truncation of the series  $p = 15$ , the tolerance parameter  $\epsilon = 10^{-12}$ , the number of finite elements  $N = 301$  and the time step  $\Delta t = 10^{-3}$  s.

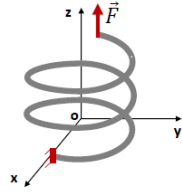


Figure 1: Recessed-loaded helical spring

In Figure (2), We represent the temporal evolution of displacements and rotations at the loaded node, expressed in the Cartesian reference frame. This is done using the linear calculus and the high-order implicit algorithm. From these figures, we notice that taking into account the geometric nonlinearity in our high order modeling has a non-negligible effect on the different solutions since the maximum relative deviation defined with respect to the solution of the linear problem, is of the order of 15,43 % for the angle  $\theta_x$  and 52,02 % for the angle  $\theta_z$ .

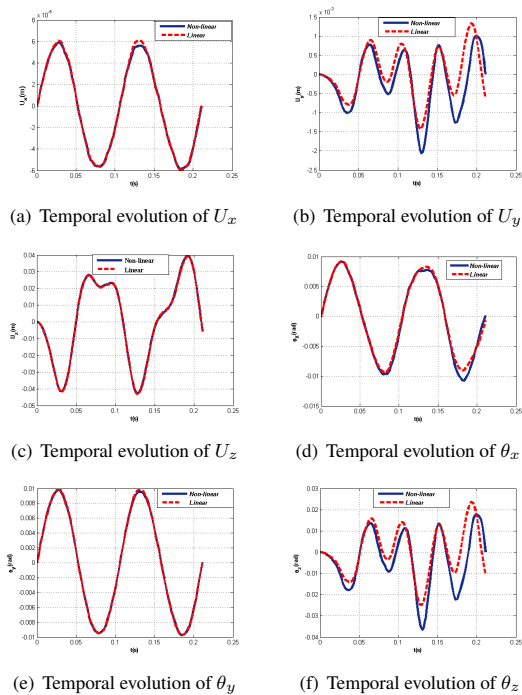


Figure 2: Time evolution of displacements and rotations at the loaded node obtained by the linear calculation and the high order algorithm

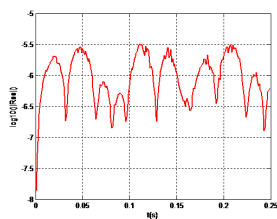


Figure 3: Variation of the decimal logarithm of the norm of the residual vector as a function of time

The quality of the different solutions obtained using the high-order algorithm proposed in this work is very satisfactory as shown in Figure (3).

### 5 Conclusion

In this work, we proposed a high-order numerical approach for the nonlinear dynamic computation of helical springs. This modeling is based on the finite element method using a curvilinear finite element with twelve degrees of freedom, Newmark’s implicit time scheme, the homotopy technique, Taylor series development and the continuation procedure. The nonlinearity considered in this study is of geometrical type and the kinematics adopted are those of Timoshenko and Saint-Venant. The proposed algorithm obtained results are satisfactory in comparison with the linear calculation. In comparison with the linear calculation.

### References

- [1] D.PEARSON, *The transfer matrix method for the vibration of compressed helical springs*. Journal of Mechanical Engineering Science, 1982, vol. 24, no 4, p. 163-171.
- [2] Y.XIONG, B.TABARROK, *A finite element model for the vibration of spatial rods under various applied loads*, International Journal of Mechanical Sciences, 1992, vol. 34, no 1, p. 41-51.
- [3] M.TAKTAK, F. DAMMAK, S. ABID, M.HADDAR, *A finite element for dynamic analysis of a cylindrical isotropic helical spring*, Journal of Mechanics of Materials and Structures, 2008, vol. 3, no 4, p. 641-658.
- [4] W.H.CHEN, P.TSAI, *On static and dynamic finite element analysis of helical springs and experimental verifications*, Journal of the Chinese Institute of Engineers, 1983, vol. 6, no 1, p. 9-20.
- [5] F.BOUSSAOUI, H.LAHMAM, B.BRAIKAT, *Numerical High-Order Model for the Nonlinear Elastic Computation of Helical Structures*, Modelling and Simulation in Engineering, 2021, vol. 2021.
- [6] E.L.ALLGOWER, *A survey of homotopy methods for smooth mappings*. In : *Numerical solution of nonlinear equations*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1981. p. 1-29.
- [7] B. Cochelin, *A path-following technique via an asymptotic-numerical method*. Computers & structures, 1994, vol. 53, no 5, p. 1181-1192.



# MODELING AND SIMULATION OF LINEAR VIBRATION OF A MAGNETOSTRICTIVE ACTUATOR BY MESHLESS METHOD

K. BELFALLAH, M. JAMAL

Laboratoire d'Ingénierie et Matériaux (LIMAT), Faculté des Sciences Ben M'Sik, Hassan II University of Casablanca, BP 7955, Sidi Othman, Casablanca, Morocco.

\*Email: k.belfallahfsb@gmail.com Tel: +212 655575671

## Abstract:

The objective of this work consists to model and simulate the vibrations of magnetostrictive actuators. The mechanical modeling of the actuator is performed using a one-dimensional magnetostrictive beam attached to an elastic spring. The formulation of problem is carried out using the Euler-Bernoulli theory of elastic beams taking into account the coupling of mechanical and magnetic effects. The beam is assumed to be subjected to an axial magnetic field. The dynamical equation of the actuator is obtained by applying the Lagrangian formalism. The vibrations of the actuator are governed by a spatio-temporal partial differential equation whose coefficients are depended on time. Its resolution is made by adopting two numerical approaches, the Moving Least Squares (MLS) and the Radial Point Interpolation method (RPIM).

**Keywords:** *Vibration, Magnetostriction, Magnetostrictive material, Actuator, rod, Moving Least Squares (MLS), Radial Point Interpolation Method (RPIM)*

## 1. Introduction

Magnetostrictive materials are a class of active metallic components that deform when exposed to magnetic fields. These deformations are a manifestation of magnetoelastic coupling. This class of materials is popular for actuation and sensing and is commonly used as actuators and sensors in a wide variety of noise and vibration control problems. They have potential applications in several sectors, such as aviation and automotive [1]. These fields require sensors and actuators capable of real-time damage prevention, detection, and repair in a number of critical structural components [1]. The range of applications for this material is vast; examples include active vibration and noise control systems, machine tools, servo valves, hybrid motors, sonar devices, tomography, automatic braking systems, etc. A particular typical and important example of such magnetostrictive materials is Terbium Iron Naval Ordnance Laboratory Dysprosium, named Terfenol-D with chemical formula  $Tb_{0.3}Dy_{0.7}Fe_{1.9}$ . It is highly magnetostrictive, i.e., capable of producing strong magnetic deformations used in sensitive devices such as sensing devices (sensors) and actuators.

Research on magnetostrictive materials and the dynamic behavior of structures made of these magnetostrictive materials has attracted a lot of interest in recent years [2]. Modeling tools are therefore essential to help optimize magnetostrictive structures made of magnetostrictive materials.

In this work, the vibrations of a magnetostrictive actuator are studied using a numerical approach based on meshless methods. The mechanical modeling of this magnetic device is carried out using a one-dimensional elastic and ferromagnetic Euler-Bernoulli beam attached to an elastic spring. The material of which the beam is made is Terfenol-D. The equation governing the vibrations of the actuator has been obtained analytically by applying the Lagrangian formalism. The dynamic equation obtained is a partial derivative equation that describes the propagation of elastomagnetic waves with a variable coefficient as a function of time. Its analytical solution is difficult or impossible to obtain analytically. The numerical solution of the dynamic equation governing the vibrations of the magnetostrictive actuator is performed by (MLS) [4] and (RPIM) [5]. A comparison of the results obtained is presented.

## 2. Theoretical formulation

The considered magnetostrictive actuator is shown in Figure 1.

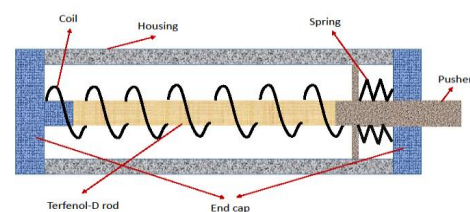


Figure 1: Experimental device of the magnetostrictive actuator

To investigate the vibrational behavior of the magnetostrictive actuator, we model this device by an elastic ferromagnetic rod (Terfenol-D) of length  $L$ , cross-section area, mass density, Young's modulus, magnetoelastic coefficient, and magnetostrictive modulus, attached to a spring of stiffness. The space coordinate  $x$ -axis is aligned with the axis of the rod. The rod is fixed at and restricted at the end by the spring and subjected to a longitudinal magnetic field (see figure 2).

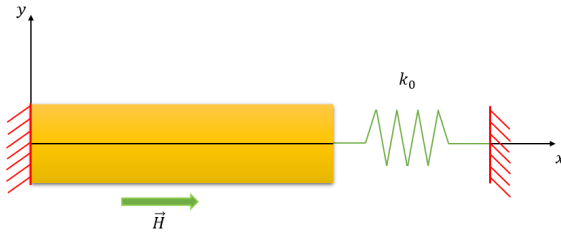


Figure.2: Unidimensional model of the magnetostrictive actuator

### a. Constitutive equations

The considered unidimensional nonlinear constitutive law of the homogeneous and isotropic magnetostrictive material is given by [3]:

$$\begin{cases} \sigma = \frac{E\varepsilon - EmH^2}{1 + EH^2} \\ B = \mu H + mH\sigma + rH\sigma^2 \end{cases} \quad (1)$$

where  $\sigma$  is the normal stress,  $B$  is the magnetic induction,  $\varepsilon$  is the normal strain and  $\mu$  is the magnetic permeability.

### b. Equilibrium equation and boundary conditions

To obtain the vibrational equation of the mechanical system, we use the Lagrangian formalism. The Lagrangian of this system is given by:

$$L = T - U = T - U_e + U_m \quad (2)$$

with  $T$ ,  $U_e$  and  $U_m$  respectively represents the kinetic energy, the elastic energy and magnetic energy.

Introducing the displacement field of the Terfenol-D rod, we get the following governing equation for the longitudinal vibration of the studied actuator as [3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} C(t) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \\ C(t) = \frac{1}{(1 + rEH^2(t))^2} \end{cases} \quad (3)$$

where  $C(t)$  is a function of time  $t$  which depends on Young modulus  $E$ , magnetoelastic coefficient  $r$  and magnetic field  $H$ .

The wave propagation equation (3), is completed by the following boundary:

$$\left[ \frac{\partial u(x=l,t)}{\partial x} + \frac{K_0}{EA} (1 + rEu(x=l,t))^2 \right]_{x=l} = mH^2 \quad (4)$$

$$\text{And } u(x=0,t) = 0 \quad (5)$$

and by the periodicity conditions:

$$\begin{cases} u(x,0) = u(x,T) \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,T)}{\partial t} \end{cases} \quad (6)$$

Remark that the dynamical equation (3) has a variable coefficient with time  $t$  and the vibration problem of the magnetostrictive actuator is described by the boundary value problem with the periodicity condition in time (4)–(5) et (6). We propose, in the next section, a two numerical approaches to solve this problem: the Moving Least Squares (MLS) and the Radial Point Interpolation Method (RPIM).

## 3. Numerical model

### Space discretization procedure Mesh-free methods

The displacement field  $u(x,t)$  at any point of the rod can be expressed using  $N$  displacement values of the scattered particles  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ , according to the meshless methods [6,7], as follows:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) u_i = \phi^T(x) U_S \quad (7)$$

where  $n$  is the number of the nodes that are included in the local support domain of the point at  $x$ ,  $u_i$  is the nodal field variable at the  $i^{th}$  node,  $U_S$  is the vector that collects all the field variables at these  $n$  nodes, and  $\phi_i(x)$  is the shape function of the  $i^{th}$  node.

Inserting (7) in (3) we obtain the following material system:

$$[M]\{\ddot{u}\} + C(t)[K]\{u\} = \{0\} \quad (8)$$

With

$$[M] = \rho \phi(x) \quad ; \quad [K] = -E \phi_{,xx}(x) \quad (9)$$

$[M]$ : is the mass matrix,  $[K]$ : is the stiffness matrix.

### Time discretization procedure-Newmark Scheme

Using the Newmark implicit time scheme, the time discretized form of the equation (8) is expressed by:

$$[M]\{\ddot{u}\}^{n+1} + [\bar{K}]\{u\}^{n+1} = \{0\} \quad (10)$$

$$\text{with } [\bar{K}] = C(t)[K] \quad (11)$$

Where  $\{u\}^{n+1}$  is the nodal displacement,  $\{\dot{u}\}^{n+1}$  is the nodal velocity and  $\{\ddot{u}\}^{n+1}$  is the nodal acceleration at time  $(n+1)\Delta t$ , where  $\Delta t$  is the time step and  $n = 1, 2, \dots, N$  given by:

$$\{\dot{u}\}^{n+1} = b_0 \{\dot{u}\}^n + b_1 \{\ddot{u}\}^n + b_2 \{\dot{u}\}^{n+1} \quad (12)$$

$$\{u\}^{n+1} = a_0 (\{u\}^{n+1} - \{u\}^n) - a_1 \{\dot{u}\}^n - a_2 \{\ddot{u}\}^n \quad (13)$$

with  $a_i$  and  $b_i$  ( $i=0,1,2$ ) are the Newmark coefficients [6].

## 4. Numerical application

Consider the vibration of a magnetostrictive rod (Terfenol-D) of length  $l = 0.25m$ , section  $A = 3.14 \cdot 10^{-4} m^2$ , Young's modulus  $E = 26.5GPa$  and mass density  $\rho = 9250 kg m^{-3}$ . The magnetostrictive modulus  $m = 0,09 \cdot 10^{-12} m^2 A^{-2}$  and the magnetoelastic coefficient  $r = -2,77 \cdot 10^{-20} m^2 A^{-2} Pa^{-1}$ , the stiffness of the spring  $k_0 = 3 \cdot 10^7 Nm^{-1}$ . These values are the same of those used in [2]. The number of turns in the coil  $n = 120$  and the AC current passing through the solenoid is harmonic:  $i(t) = i_{imax} \sin(\omega t)$ , with  $i_{imax} = 10A$  and the pulsation  $\omega = 4,4kHz$ ,  $\alpha = 0.25$  and  $\beta = 0.5$ .

Figure .3 shows that the frequency of the displacement response is twice that of the excitation current. This is a numerical confirmation of the experimentally observed double frequency effect for a Terfenol-D actuator without a magnetic field. The comparison between the Moving Least Squares and the Radial Point Interpolation

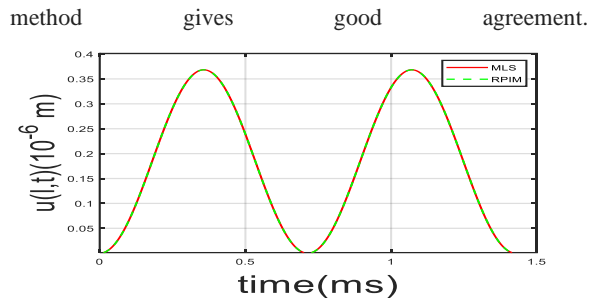


Figure.3: Displacement versus time at the end of the pusher  $u(l, t)$

The effect of various material parameters ( $m$ ,  $r$  and  $k$ ) on the performance of the actuator is also studied.

#### Effect of $m$

The displacement at the end of the pusher ( $x = l$ ) is computed for three different values the magnetostrictive modulus:  $m = 0,06 \times 10^{-12}$ ,  $0,09 \times 10^{-12}$  et  $0,14 \times 10^{-12} m^2 A^{-2}$  for a fixed magnetoelastic coefficient  $r = -2,77 \times 10^{-20} m^2 A^{-2} Pa^{-1}$  and spring stiffness  $k_0 = 3 \times 10^7 Nm^{-1}$

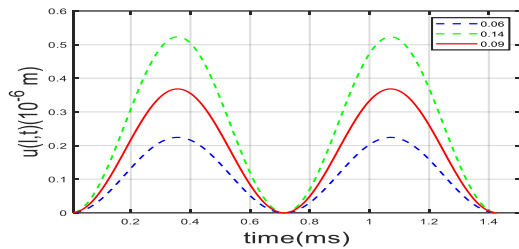


Figure.4: Influence of magnetostrictive modulus  $m$  on the displacement  $u(l, t)$ , with  $k_0 = 3 \times 10^7 Nm^{-1}$  and  $r = -2,77 * 10^{-20} m^2 A^{-2} Pa^{-1}$

The obtained results show that the magnetostrictive modulus  $m$  has an effect on the displacement response, The effect of the magnetoelastic coefficient on the output displacement is minimal. If  $m$  increases, the displacement decreases.

#### Effect of $r$

The displacement at the end of the pusher ( $x = l$ ) is computed also for three different values the magnetoelastic coefficient:  $r = -2,77 \times 10^{-20} m^2 A^{-2} Pa^{-1}$ ,  $0 m^2 A^{-2} Pa^{-1}$  and  $7 \times 10^{-20} m^2 A^{-2} Pa^{-1}$ , while the magnetostrictive modulus is set to  $m = 0,06 \times 10^{-12} m^2 A^{-2}$  and  $k_0 = 3 \times 10^7 Nm^{-1}$ .

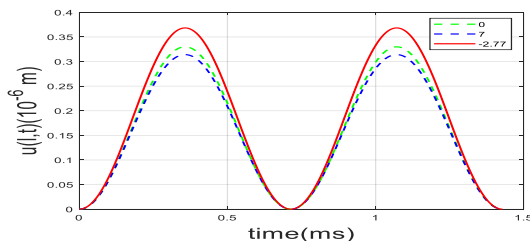


Figure.5: Influence of magnetoelastic coefficient  $r$  on  $u(l, t)$ ,  $m = 0,09 \times 10^{-12} m^2 A^{-2}$  and  $k_0 = 3 \times 10^7 Nm^{-1}$

Figure 5 shows that the variation of the magnetoelastic coefficient  $r$  does not have a remarkable influence on the displacement response.

#### Effect of $k_0$

The computation of displacement at the end of the pusher ( $x = 1$ ) for three different values of spring stiffness:  $k_0 = 3 \times 10^7$ ,  $12 \times 10^7$ ,  $40 \times 10^7 Nm^{-1}$  and for  $r = -2,77 \times 10^{-20} m^2 A^{-2} Pa^{-1}$  and  $m = 0,09 \times 10^{-12} m^2 A^{-2}$

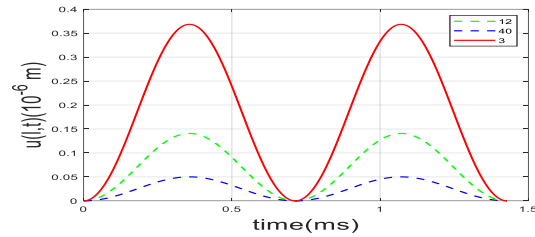


Figure.6: Effect of the spring stiffness  $k_0$  on  $u(l, t)$ ,  $r = -2,77 \times 10^{-20} m^2 A^{-2} Pa^{-1}$  and  $m = 0,09 \times 10^{-12} m^2 A^{-2}$

Figure 6 show that if the spring stiffness decreases, the amplitude of the displacement increases.

## 5. Conclusion

In this work, a beam-spring model is presented for analyzing the longitudinal vibrations of a magnetostrictive actuator. The coupling of magnetic and mechanics effects is taken into account in this study. The vibrational response of the actuator is computed numerically by solving a wave propagation equation with time-dependent coefficients. Two numerical approaches are based on the meshless method combined with the Newmark time scheme. The influence of some magnetic and mechanical parameters is investigated. A comparison of results is also made.

## References

- [1] H.J.Busch-Vishniac H J, Electromechanical Sensors and Actuators, New York: Springer-Verlag, 1997.
- [2] Xinchun Shang, Ernie Pan and Liping Qin, Mathematical modeling and numerical computation for the vibration of a magnetostrictive actuator, Smart Materials and Structures, 17, (2008), 045026
- [3] Y.P.Wan, D.Fang and K.C.Hwang, Non-linear constitutive relations for magnetostrictive materials, Int. J. Non-linear Mech. 38 (2003), 1053–65
- [4] G.R. Liu, & Y.T.Gu, An introduction to meshfree methods and their programming. Springer Science & Business Media, 2005.
- [5] Y.Chen, J.Lee, & A.Eskandarian, Meshless methods in solid mechanics. Springer Science & Business Media, 2006.
- [6] Newmark, Nathan M. "A method of computation for structural dynamics." Journal of the engineering mechanics division 85.3 (1959): 67-94.
- [7] Lacheisserie E D 1993 Magnetostrictions: Theory and Applications (New York: CRC Press)

## Influence du type de sol sur la réponse sismique de la structure en considérant l'interaction sol-structure

Soumaya Eljanous<sup>1</sup>, Abdelouafi El Ghoulbzouri<sup>2</sup>

1. Equipe de Recherche MODSGC, ENSA-H, université Abdelmalek Essaadi, soumaya.eljanous@gmail.com

2. Equipe de Recherche MODSGC, ENSA-H, université Abdelmalek Essaadi, e.abdelouafi@hotmail.fr

### Abstract

The objective of this contribution is to study the effect of the soil and structure intersection (SSI) on the seismic response of a reinforced concrete structure by considering four wave speeds according to the types of soil cited in the EUROCODE 8.

Indeed, this taking into account of the interaction (soil-foundation) is translated from the impedance functions associated with a spring-damper system, thus integrating the flexibility of the soil.

By analyzing firstly the effect of the soil and structure intersection (SSI) on the period of the structure, secondly on the total structure damping and finally on the performance point displacement of the structure after a nonlinear static analysis PUSH-OVER.

This was done using the finite element program SAP2000.

### Résumé

L'objectif de cette contribution est d'étudier l'effet de l'interaction sol et structure (ISS) sur la réponse sismique d'une structure en béton armé en considérant quatre vitesses des ondes selon les types de sol citées dans l'EUROCODE 8.

En effet cette prise en compte de l'interaction (sol-fondation) est traduite à partir des fonctions d'impédance associées à un système ressort-amortisseur, intégrant ainsi la flexibilité du sol.

En analysant premièrement l'effet de l'intersection sol et structure (ISS) sur la période de la structure, deuxièmement sur l'amortissement total de structure et finalement sur le déplacement de point de performance de la structure après une analyse statique non linéaire PUSH-OVER.

Ceci a été réalisé à l'aide du programme d'éléments finis SAP2000.

### Mots clefs

*ISS, la réponse sismique, point de performance, EUROCODE 8, sol.*

### Keywords

*ISS, the seismic response, performance point, EUROCODE 8, soil.*

### 1. Introduction

Dans la conception structurelle conventionnelle, on suppose généralement que la fondation est simplement disposée sur une roche rigide exposée à une accélération latérale unidirectionnelle, et l'interaction sol-structure (ISS) n'est généralement pas prise en compte. Ces dernières années, de nombreuses spécifications de conception, telles que l'Eurocode 8 et l'ASCE/SEI 7, ont commencé à prendre en compte l'influence de l'ISS.

Comme nous le savons tous, l'interaction entre le sol et la structure commence pendant la phase de construction. Les contraintes et les déformations qui se produisent dans un nouveau bâtiment affecteront le sol sur lequel le bâtiment est situé, et d'autre part, le mouvement du sol affectera également le bâtiment. Après un certain temps, ces mouvements s'équilibrent. De toute évidence, le degré d'interaction est très important, en particulier pour les structures de sol hautement compressibles. La flexibilité du sol provoque le tassement et la rotation de la fondation sous la charge appliquée. La rigidité relative de la structure, de la fondation et du sol détermine le comportement du système ISS.

Les premières analyses liées au ISS sont les travaux de Chameski, Morris, Lee et Harrison, Lee et Brown. Ils étudient des modèles analytiques de problèmes d'interaction sol-structure pour le cas de portiques sur semelles isolées. Ils décrivent également les fondations sur radier et les problèmes qui peuvent survenir lorsqu'ils interagissent avec des semelles combinées. Des analyses dans le domaine temporel et fréquentiel sont utilisées pour tenter de vérifier numériquement les résultats expérimentaux. Le problème ISS dans les centrales nucléaires a été étudié in situ et en laboratoire par Kitada et al., Kitada et Iguchi. Muria-Vila et al. ont montré que les ISS ont un effet sur la rigidité et la fréquence d'une structure.

En général, il a été établi que l'interaction entre les structures et le sol a des implications importantes sur le comportement structurel dans la conception de structures parasismiques. De plus, parce qu'un bâtiment ne peut pas fonctionner indépendamment du sol ou qu'une infrastructure peut agir indépendamment d'une

superstructure, le ISS doivent être pris en compte lors de la résolution de ce problème de conception.

D'où l'objectif de cette étude est de confirmer que la réponse de la structure dépend non seulement de ses caractéristiques dynamiques, de l'excitation sismique mais aussi de caractéristique suivante : type de sol.

## 2. Influence du type de sol sur la réponse de la structure

Dans cette partie on s'intéresse à une comparaison numérique en considérant quatre vitesses des ondes selon les types de sol citées dans l'EUROCODE 8, on va analyser premièrement l'effet de ISS sur le rapport  $T_{flex}/T_{fix}$  avec  $T_{flex}$  la période de la structure sur une base flexible et  $T_{fix}$  la période de structure sur un base fixe, deuxièmement sur l'amortissement total de structure et finalement sur le déplacement de point de performance de la structure après une analyse statique non linéaire PUSH-OVER.

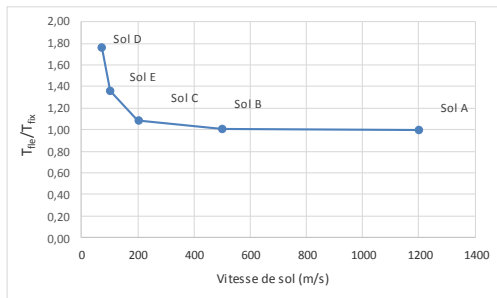


Figure 1 : Variation de  $T_{flex}/T_{fix}$  par rapport au type de sol

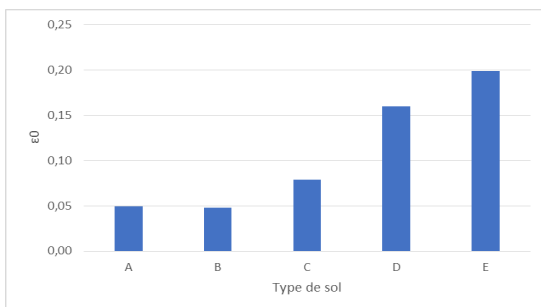


Figure 2 : Variation d'amortissement total de structure par rapport au type de sol

Type de sol	Vs	Déplacement au point de performance (mm) avec $\epsilon = 5\%$	Déplacement au point de performance (mm) avec $\epsilon_0$ de structure
A	1200	8,515	8,515
B	500	14,19	14,19
C	200	19,084	16,604
D	100	20,356	13,97
E	70	23	14,43

Tableau 1 : Influence d'ISS sur le déplacement de point de performance

Le premier effet d'ISS constaté selon la figure 2 est l'allongement de la période fondamentale de la structure, pour les sols meubles et très meubles, par rapport à la valeur obtenue dans le cas de la structure à base encastree, cet effet est exprimé par l'augmentation du rapport  $T_{flex}/T_{fix}$  lorsqu'on fait minimiser la vitesse d'onde de cisaillement de sol.

La figure 3 montre une augmentation notable de l'amortissement total pour une structure fondée sur un sol caractérisé par une vitesse de cisaillement inférieure de 400m/s,

Le tableau 1, illustre la variation du déplacement spectral au point de performance avec et sans prise en compte du ISS, différents types de sols ont été considérés. On constate que le déplacement au point de performance devient considérable en passant de sol à une vitesse d'onde de cisaillement plus élevée à une vitesse plus faible. D'après les résultats présentés précédemment, il était évident que pour un sol avec  $V_s$  de 1200m/s, l'interaction sol-structure n'a pas d'impact sur la variation du déplacement.

Donc les résultats obtenues dans les figures 2 et 3 justifient les résultats montrés dans le tableau 1, d'où on remarque la nécessité de prendre par considération ISS pour les sol de vitesse inférieure à 400m/s puisque il y a une différence claire au niveau de déplacement au point de performance avant la considération de ISS et après donc il est indispensable de considérer l'interaction sol structure pour les structures basées sur un sol de type C D E (sol avec vitesse d'onde inférieure de 400 m/s)

## 3. conclusion

Cette contribution montre la nécessité de prendre en compte l'effet de l'interaction sol-structure sur la réponse sismique d'une structure en béton armé.

Ceci a été effectué dans le cadre d'une approche capacitive. L'étude paramétrique menée a permis de montrer les effets de ISS sur la période fondamentale, sur l'amortissement total de la structure et sur le déplacement au point de performance d'où il a été confirmé que la réponse de la structure ne dépend pas seulement de ses caractéristiques dynamiques et de l'excitation sismique mais aussi de type de sol.

## Références

- EuroCode 8. Design of structures for earthquake resistance. Part 5: foundations, retaining structures and geotechnical aspects; 2004.
- ASCE/SEI 7. Minimum design loads and associated criteria for buildings and other structures. American Society of Civil Engineers, Reston, VA; 2016.
- Chameski S. Structural rigidity in calculating settlements. *J Soil Mech Found Divis* 82(1); 1956.
- Morris D. Interaction of continuous frames and soil media. *J Struct Divis* 92(5); 1966: 13–44.
- Lee IK, Harrison HB. Structures and foundation interaction theory, *Proc. ASCE*, 96, ST 2; 1970. 177–198.
- Lee IK, Brown PT. Structures and foundation interaction analysis. *J Struct Eng Divis ASCE* 1972;11:2413–31.
- Yano T, Kitada Y, Iguchi M, Hirotsu T, Yoshida K. Model test on dynamic cross interaction of adjacent buildings in nuclear power plants. In: Presented at the 12th world conference on earthquake engineering, New Zealand; 2000.

## Nonlinear analysis of the track-bridge interaction effect on the dynamics of a high speed railway bridge

M. Tahiri<sup>1</sup>, A. Khamlichi<sup>2</sup>, M. Bezzazi<sup>1</sup>

1. Department of Physics, Mechanical and Civil Engineering Laboratory, Faculty of Sciences and Technology, University Abdelmalek Essaadi, Tangier, Morocco. [tamamed7@gmail.com](mailto:tamamed7@gmail.com); bezzazi@hotmail.com
2. Department STIC, Communication Systems and Detection Laboratory, National School of Applied Sciences, University Abdelmalek Essaadi, Tetouan, Morocco, khamlichi7@yahoo.es

### Abstract

The aim of this work is to provide a better understanding of the behaviour of a simply supported railway bridge carrying one single ballasted track, which characterized by a viscoelastic foundation Winkler type, and subjected to a moving train loads. The main feature of the model is that the influence of the ballasted track been introduced through a non-linear (cubic) force-displacement relation associated to the vertical slip at the interface between the bridge deck and the ballasted track composed by rails, sleepers and ballast. In comparison to experimental tests, numerical results have been demonstrated the efficiency of the proposed theoretical model, and the effects of the nonlinear ballasted track on the critical velocities associated to resonance effects of the aforementioned structures are analysed.

**Keywords:** *Ballasted track, resonance, viaduct, acceleration, non-linear behavior.*

### 1. Introduction

Since the development of high speed railway lines, the dynamic response of railway bridges belonging these it becomes a crucial subject interest of many researchers. Particularly, short or median simply supported beams or plates (S-S) are defined as the main structures which could be subjected to resonance situations, and a high levels of vertical accelerations may occur, which can results to ballast destabilization, passenger discomfort, derailment of rails and associated risks [1]. In this context, one of the most obvious causes of discrepancies that have been observed between experiments and numerical models is the elimination of the track's contribution effects in the developed numerical models [2, 3] or in other words the consideration of the ballasted track superstructure and the bridge structure as one uniform beam model.

From the definition, the track infrastructure represents an important contribution in the global

response of a studied railway system, in which it ensures an interaction zone between the moving trains and the bridge. However, the effect of the ballasted track in the dynamic response of railway bridge at resonance, has not well known and still entail uncertainties and requires further research [4]. Previous study have already investigated the coupling effect produced by the ballasted track where the common model between them consists to modelling the bridge structure and the track superstructure by two E-B beams connected by an advanced system of viscoelastic vertical spring/dampers a state-of-the-art review on the evolution of experimental tests and numerical models investigating the effect of the train-track interaction mechanisms was recently predicted in the work of Zhai et al. [3].

In this work, a 2D track-bridge interaction model is proposed where the dynamic response of a simply supported, single ballasted track non-skewed bridge is analyzed, with the objective of effectuating a deep understanding of the influence of the track-bridge interaction mechanisms on the bridge resonant response of a lengthier bridge. The organization of this contribution is as follows: in Section 2 the problem is formulated where the mathematical model is presented. Based on experimental tests, numerical calculations in line with a discussion on the influence of the track superstructure are proposed in Section 3 and finally a brief conclusion is extracted in Section 4.

### 2. Proposed model and theory

The studied system is modelled as a double-beam subsystem consists of two uniform E-B beams, simply supported, parallel and connected between them through single continuous nonlinear viscoelastic foundation as shown schematically in Figure 1 which represents the rail bed. Both beams have the same length  $l$ , the lower one represents the bridge whereas the upper represents the ballasted track composing by ballast, sleepers and rails and is subjected to moving train loads.

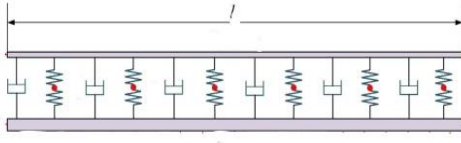


Figure 1. Model of simply supported double-beam system.

Based on the Euler-Bernoulli theory and by using the Hamilton's principle, one can obtain the governing nonlinear partial differential equation of motion of the bridge under the moving trains as follows

$$\begin{aligned}
 EI_b \frac{\partial^4 w_b(x,t)}{\partial x^4} + m_b \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial t^2} + c_d \frac{\partial w_b}{\partial t} &= F_v(x,t) \\
 -k_l (w_b - w_s) - k_{nl} (w_b - w_s)^3 - c_w D_t^\alpha (w_b - w_s) & \\
 EI_s \frac{\partial^4 w_s(x,t)}{\partial x^4} + m_s \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial t^2} + c_d \frac{\partial w_s}{\partial t} &= k_l (w_b - w_s) \\
 + k_{nl} (w_b - w_s)^3 + c_w D_t^\alpha (w_b - w_s) &
 \end{aligned} \quad (1)$$

Where  $w_i(x,t)$  is the vertical displacement in the beams,  $EI_i$ ,  $m_i$  and  $c_d$  are the bending stiffness, mass per unit length and damping coefficient of the  $i$ th beam respectively, while  $i = b$  or  $s$  represents the upper beam (b) or lower beam (s). The other parameters  $k_l$ ,  $k_{nl}$  are respectively the linear and nonlinear parts of the foundation stiffness and  $c_w$  is the damping coefficient of the foundation.  $D_t^\alpha$  is the caputo derivative which is introduced in order to simulate the damping effect due to the rail pad and is given as

$$D_t^\alpha[w] = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} w(\tau) d\tau, & 0 < \alpha < 1 \\ \frac{d}{dt} w(t), & \alpha = 1 \end{cases} \quad (2)$$

We note that the track irregularities have not been considered. The studied bridge is subjected to moving trains which are typically idealized as moving constant loads, and the total vertical force which applied at the centerline of the upper beam is given by [5]

$$F_v(x,t) = -\sum_{k=1}^{N_v} F_k \left( H\left(t - \frac{d_k}{c}\right) - H\left(t - \frac{d_k + L}{c}\right) \right) \delta(x - ct + d_k) \quad (3)$$

Where  $N_v$  is the total number of axle loads,  $c$  is the constant train speed,  $d_k$  is the distance from the axle to the first point on the beam,  $F_k$  is the axle load of the axle number  $k$ ,  $H$  and  $\delta$  are the Heaviside and Dirac Delta function. The use of moving load model in the

simulation becomes very interesting than the use of moving mass model or moving suspension mass model.

As mentioned previously, the studied beams are simply supported and in order to transform the governing partial differential equation Eq. (1) into ordinary differential equations, we use the common versatile numerical method used by many researcher, the Galerkin method, where for the first bending mode of vibration, the vertical displacement of the beam is assumed in the following form

$$w_i(x,t) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) q_i(t) \quad ; \quad i = b \text{ or } s \quad (4)$$

After Substituting Eq. (4) into Eq. (1), the obtained ordinary differential equations are known by Dufing nonlinear equations, then by using the fourth order Runge-Kutta method, the time history response of the studied beams can be predicted which all of them are calculated at mid-point section  $x = L/2$ .

### 3. Proposed model and theory

In this section, the numerical results obtained in the dynamic analyses of a reel simply supported, single ballasted track steel-concrete composite bridge of length  $L=36$ m are discussed. The physical and geometrical properties of this studied structure are listed in Table 1. In order to effectuate a direct comparison of results, the studied bridge is the same one used in Ref [5]. The moving train acting on the bridge is the so called Steel Arrow train and its relevant geometrical characteristics can also found in Ulker and karoumi [5].

Table 1. Mechanical properties of the Skidtrask bridge [5]

Length (m)	36
Damping coefficient (%)	0.5
Mass per unit length (kg/m)	17000
Natural frequency (Hz)	3.855

Generally the rail support stiffness at the bridge was varied in the range  $100-200$  MN/m, and due to the evident dispersity in the values of the track parameters such as stiffness and damping [3] considered in each work as presented before in the aforementioned literature, the physical properties of foundation binding the two beams that we have been used here are given as follows [3]:

$$k_l = 5.37 \text{ MN/m}^2 \quad ; \quad k_{nl} = 2 \times 10^{10} \text{ N/m}^4 \quad ; \quad c_w = 20.604 \text{ KNs/m}^2 \quad (5)$$



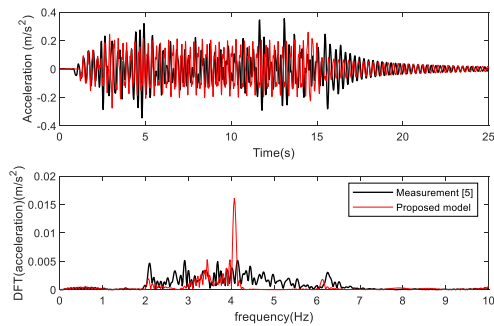


Figure 2. Comparison between measured and computed vertical acceleration at mid-span of the bridge beam under the Steel Arrow train at the speed 200km/h [5].

From this figure, one can observe that the coincidence between the numerical simulation and the measured response quits good, which proves and confirms the accuracy of the proposed model in modeling the behavior of the ballasted track-bridge interaction. Additionally, some discrepancies can be observed in Figure 2 and the explication of this can be associated to the vehicle bridge interactions effects, which are neglected and to the real skew of the bridge which is not taking into account in the present model.

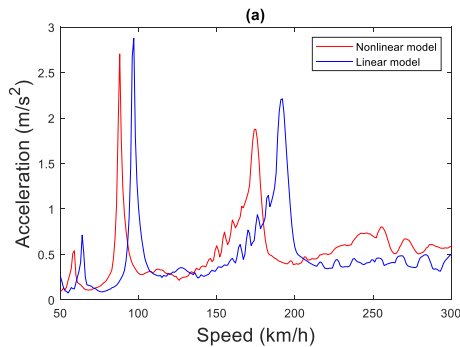


Figure 3. Vertical acceleration at mid-span of the bridge beam as a function of the train speeds.

In addition, Figure 3 shows the maximum absolute dynamic response acceleration at mid-span of the bridge beam against the train speed, this figure demonstrates clearly that the bridge deck dynamic response is sensitive to the rail support stiffness, and demonstrates that taking into account of the nonlinear behavior of the ballasted track gives rise to a decreased in the identified natural frequencies then in the critical speeds, which can be explained by the loosing of stiffness of the bridge namely that of the ballast material.

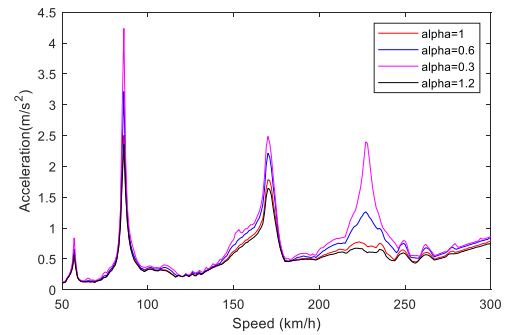


Figure 4. Vertical acceleration at mid-span of the bridge beam as a function of the train speed: effect of  $\alpha$ .

In Figure 4, the effect of the Caputo derivative order  $\alpha$  in the vertical acceleration of the beam is analyzed, one can observe that as the coefficient  $\alpha$  increase, the vertical response at resonance decreases, and as  $\alpha$  decreases, the vertical acceleration increases at resonance.

#### 4. Conclusion

In this work the effect of the nonlinear behaviour of the ballasted track on the vertical dynamic response of a simply supported, single track non-skewed railway bridge is evaluated. The obtained results indicate that the dynamics of the studied system is governed by Duffing like oscillator, and demonstrate that the track superstructure represents a main source of the observed non-linearity and that the contribution of the track generally in the response of the aforementioned structures must be integrated and not neglected.

#### References

- [1] M. Zacher, M. Babler, *Dynamic behaviour of ballast on railway bridges. Dynamic of high speed railway bridge*, Francis & Taylor. 2008.
- [2] W. Zhai, Z. Han, Z. Chen, L. Ling, S. Zhu. *Train-Track-bridge dynamic interaction: state of the art review*. *Vehicle System Dynamics* 7 94 (2019), 984-1027.
- [3] M D. Martinez-Rodrigo, A. Romero, E. Moliner, J. Chorda, P. Galvin. *Influence of ballast track on vertical response of multi-span simply-supported bridges under railway traffic*, ICCES 2020: The 26<sup>th</sup> International Conference on Computational & Experimental Engineering and Sciences, 2020.
- [4] C. Riguero, C. Rebelo, L S. Da Silva. *Influence of ballast models in the dynamic response of railway viaducts*. *Journal of Sound and Vibration*, 329 (2010), 3030-3040.
- [5] Ulker-Kaustell M, Karoumi R, *Influence of non-linear stiffness and damping on the train-bridge resonance of a simply supported railway bridges*, *Engineering Structures*, 41 (2012) 350-353.

## Détermination des coefficients de réflexion et de transmission des coques multicouches

S. Youssoufou<sup>1a</sup>, J. Houyouk<sup>1b</sup>, H.H Meyouou<sup>1c</sup>, G. E. Ntamack<sup>1d</sup>, L. Azrar<sup>2,3e</sup>

<sup>1</sup>Groupe de Mécanique, Matériaux et Acoustique, Département de Physique, Université de Ngaoundéré, Cameroun

<sup>2</sup>Research Center STIS, Team M2CS, Department of Applied Mathematics and Informatics, ENSAM, Mohamed V University, Rabat, Morocco

<sup>3</sup>Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, King Abdulaziz University, Jeddah, Saudi Arabia  
a.-ysenkoua@gmail.com, b.-jacobhouyouk@yahoo.com, c.-meyououhulk@gmail.com, d- guyedgar@yahoo.fr, e- l.azrar@um5s.net.ma;

### Résumé

Les travaux présentés dans cette étude concernent le calcul des coefficients de réflexion et de transmission des coques dans le domaine de fréquences [0-10000] Hz. Ces travaux visent à déterminer les structures les plus appropriées pour réduire les nuisances sonores. Les structures considérées dans cette étude sont en aluminium et l'atténuation des ondes transversales et longitudinales n'est pas prise en compte dans notre étude. Les coefficients de réflexion et de transmission sont obtenus par la méthode d'espace d'état.

**Mots clés :** Coque à double courbure, Coefficient de réflexion, Coefficient de transmission, Méthode d'espace d'état, ondes acoustiques.

### 1-Introduction

Les coques sont des solides délimités par deux surfaces approximativement parallèles. Elles sont soit fermées sur elles-mêmes soit délimitées par une surface périphérique et le bord qui joint les deux surfaces principales. Elles sont largement utilisées dans divers domaines de la mécanique à savoir le génie civil, le transport, la construction et autres encore. Dans les constructions et le transport des passagers, les problèmes de bruit sont des questions majeures qui préoccupent les chercheurs. Des travaux approfondis ont déjà été réalisés sur ces structures pour réduire ces fléaux avec les résultats significatifs en ce qui concerne la modélisation de la propagation des ondes acoustiques. Ainsi plusieurs travaux ont été réalisés sur des plaques. Ces travaux consistaient à élaborer des nouvelles méthodes de calcul basées sur les formulations mathématiques de la propagation des ondes à travers une coque à double courbure, considérée comme le cas le plus général de structure. A cet effet, Xin and Lu [1] ont réalisé une modélisation analytique d'une perte de transmission sonore d'un panneau aéroélectrique immergé dans des fluides convectifs. Talebitooti et al. [2] ont étudié la propagation des ondes en 3D à travers une coque cylindrique, orthotrope et d'épaisseur arbitraire en utilisant la méthode d'espace d'état. Ils se sont intéressés à la transmission acoustique en employant la théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre en présence d'un écoulement subsonique

[3]. Ghassabi et al. [4] étudient la propagation des sons à travers une coque à double courbure en 3D par la méthode d'espace d'état. Des travaux réalisés jusqu'ici se sont largement consacrés à l'évaluation de la perte de transmission sonore sans prendre en compte les propriétés de réflexion et de transmission. Ce travail a pour objectif de présenter une modélisation et simulation numérique de la propagation d'ondes acoustiques dans les coques à double courbure et multicouches. Les propriétés de réflexion et de transmission ont été déterminées et analysées.

### 2-Propagation des ondes dans une coque à double courbure

Nous considérons une coque à double courbure avec une épaisseur de la paroi  $h$ , soumise à une excitation d'onde acoustique d'angle d'incidence  $\theta_1$  et d'angle de transmission  $\theta_2$ . Nous considérons le système de coordonnées curvilignes en 3D de degrés de liberté  $\alpha, \beta$  et  $\eta$  pour l'analyse de la structure. La loi de comportement à laquelle obéit cette structure est donnée par [4] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^s \\ \sigma_2^s \\ \sigma_3^s \\ \sigma_4^s \\ \sigma_5^s \\ \sigma_6^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{\alpha\alpha}^s \\ \sigma_{\beta\beta}^s \\ \sigma_{\eta\eta}^s \\ \sigma_{\beta\eta}^s \\ \sigma_{\alpha\eta}^s \\ \sigma_{\alpha\beta}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^s & C_{12}^s & C_{13}^s & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^s & C_{22}^s & C_{23}^s & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^s & C_{23}^s & C_{33}^s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{\alpha\alpha}^s \\ \gamma_{\alpha\alpha}^s \\ \gamma_{\eta\eta}^s \\ \gamma_{\beta\eta}^s \\ \gamma_{\alpha\eta}^s \\ \gamma_{\alpha\beta}^s \end{Bmatrix} \quad (1)$$

où  $\sigma_{ij}^s (i, j = \alpha, \beta, \eta)$  sont des contraintes,  $C_{ij}^s (i, j=1-6)$  les coefficients de rigidité du matériau et  $\gamma_{ij}^s$

$(i, j = \alpha, \beta, \eta)$  sont les déformations.

Les composantes du tenseur de déformation sont obtenues à partir des formulations faites sur les coques à double courbure [5]. En coordonnées curvilignes, en absence des forces de volume, l'équation de la dynamique d'une coque à double courbure est donnée par les relations suivantes [6] :

$$\begin{aligned}
H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}^s}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^s}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\eta}^s}{\partial \eta} + (2k_\alpha + k_\beta + 3k_\alpha k_\beta \eta) \sigma_{\alpha\eta}^s &= H_\alpha H_\beta \rho^s \frac{\partial^2 u_\alpha^s}{\partial t^2} \\
H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^s}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\beta\beta}^s}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma_{\beta\eta}^s}{\partial \eta} + (k_\alpha + 2k_\beta + 3k_\alpha k_\beta \eta) \sigma_{\beta\eta}^s &= H_\alpha H_\beta \rho^s \frac{\partial^2 u_\beta^s}{\partial t^2} \\
H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\eta}^s}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\beta\eta}^s}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma_{\eta\eta}^s}{\partial \eta} + (k_\alpha + k_\beta + 3k_\alpha k_\beta \eta) \sigma_{\eta\eta}^s &= H_\alpha H_\beta \rho^s \frac{\partial^2 u_\eta^s}{\partial t^2} \\
-k_\alpha H_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^s - k_\beta H_\alpha \sigma_{\beta\beta}^s &= H_\alpha H_\beta \rho^s \frac{\partial^2 u_\beta^s}{\partial t^2}
\end{aligned} \quad (2)$$

Dans cette relation,  $\rho$  est la densité du matériau,  $t$  le temps.  $H_\alpha, H_\beta$  sont des métriques,  $k_i$  ( $i = \alpha, \beta, \eta$ ) sont des nombres d'ondes.

### 3-Equation d'état d'une coque à double courbure

En combinant la loi de comportement, les expressions des déformations et l'équation de la dynamique, nous obtenons l'équation d'état suivante :

$$\frac{\partial F^s}{\partial \eta} = A^s(\eta) F^s \quad (3)$$

avec  $F^s = [u_\alpha^s, u_\beta^s, u_\eta^s, \sigma_{\eta\eta}^s, \sigma_{\alpha\eta}^s, \sigma_{\beta\eta}^s]^T$ , le vecteur d'état et  $A^s(\eta)$  est l'opérateur différentiel d'éléments 6x6 qui dépend de l'ordonnée  $\eta$  et des dérivées partielles par rapport à  $\alpha$  et  $\beta$ .

L'équation (3) est un système d'équations différentielles de premier ordre sans second membre à coefficients variables. La solution de ce système est proposée sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} u_\alpha^s \\ u_\beta^s \\ u_\eta^s \\ \sigma_{\eta\eta}^s \\ \sigma_{\alpha\eta}^s \\ \sigma_{\beta\eta}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hU_\alpha^s(\bar{\eta}) \\ hU_\beta^s(\bar{\eta}) \\ hU_\eta^s(\bar{\eta}) \\ C_{44}\bar{\sigma}_{\eta\eta}^s(\bar{\eta}) \\ C_{44}\bar{\sigma}_{\alpha\eta}^s(\bar{\eta}) \\ C_{44}\bar{\sigma}_{\beta\eta}^s(\bar{\eta}) \end{pmatrix} e^{j(\alpha x - k_{1\alpha}\alpha - k_{1\beta}\beta)} \quad (4)$$

En utilisant le modèle des couches virtuelles [4], nous pouvons écrire pour la première sous-couche :

$$\bar{F}_1^s \left( \bar{\eta}_{s,1} - \frac{\bar{X}_s}{2} \right) = \exp \left[ (-\bar{X}_s) \bar{A}_1^s \right] \bar{F}_1^s \left( \bar{\eta}_{s,1} + \frac{\bar{X}_s}{2} \right) \quad (5)$$

$\bar{\eta}_{s,1} - \frac{\bar{X}_s}{2}$  est l'épaisseur de la surface inférieure de la première sous-couche de la couche  $s$ .

$\bar{\eta}_{s,1} + \frac{\bar{X}_s}{2}$  est l'épaisseur de la surface supérieure de la première sous-couche de la couche  $s$ . C'est la relation de transfert entre la surface inférieure et la surface supérieure de la première sous-couche de la couche  $s$ .

### 4-Transfert entre couches

Nous réécrivons la relation (5) pour chaque sous-couche et à base des relations de continuité aux interfaces, nous obtenons la relation suivante :

$$\bar{F}_{\zeta_s}^s \left( \bar{\eta}_{s,\zeta_s} - \frac{\bar{X}_s}{2} \right) = T_s \bar{F}_1^s \left( \bar{\eta}_{s,1} + \frac{\bar{X}_s}{2} \right) \quad (6)$$

$T_s$  représente la matrice de transfert dans la couche  $s$ .

En propageant, nous obtenons pour toute la structure :

$$\bar{F}_{\zeta_\xi}^\xi \left( \bar{\eta}_{\xi,\zeta_\xi} - \frac{\bar{X}_\xi}{2} \right) = Q \bar{F}_1^1 \left( \bar{\eta}_{1,1} + \frac{\bar{X}_1}{2} \right) \quad (7)$$

$$Q = T_\xi T_{\xi-1} \dots T_2 T_1 = \prod_{s=\xi}^1 T_s \quad (8)$$

Dans cette équation,  $Q$  est une matrice 6x6 à coefficients constants appelée matrice de transfert globale [5].

En utilisant les conditions de chargement, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{pmatrix} U_\alpha \left( \bar{\eta}_{1,1} + \frac{\bar{X}_1}{2} \right) \\ U_\beta \left( \bar{\eta}_{1,1} + \frac{\bar{X}_1}{2} \right) \\ U_\eta \left( \bar{\eta}_{1,1} + \frac{\bar{X}_1}{2} \right) \\ \sigma_{\eta\eta} \left( \bar{\eta}_{1,1} + \frac{\bar{X}_1}{2} \right) \\ \sigma_{\alpha\eta} \left( \bar{\eta}_{1,1} + \frac{\bar{X}_1}{2} \right) \\ \sigma_{\beta\eta} \left( \bar{\eta}_{1,1} + \frac{\bar{X}_1}{2} \right) \\ P_0^R \\ P_0^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Dans cette équation, les  $Q^{ij}$  sont les coefficients de la matrice de transfert globale  $Q$ . Les  $Y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 4$ ) et les  $\bar{Y}_i$  ( $i = 1, 2$ ) sont fonction de la fréquence.

### 5-Coefficients de réflexion et de transmission

Pour la transmission, nous considérons l'équation donnant la perte de transmission sonore (STL) [1,7] :

$$\text{STL} = -10 \log(\tau), \quad \tau = \frac{I^T}{I^I} \quad (10)$$

$$I^i \quad (i = I, T) = \frac{|P_i|^2}{2\rho_i C_i} \quad (11)$$

Les  $I_i$ , sont les expressions des intensités acoustiques [8,9].

A partir des intensités acoustiques, nous avons :

$$|T_r|^2 = \left| \frac{1}{\tau} \right|^2 \quad (12)$$

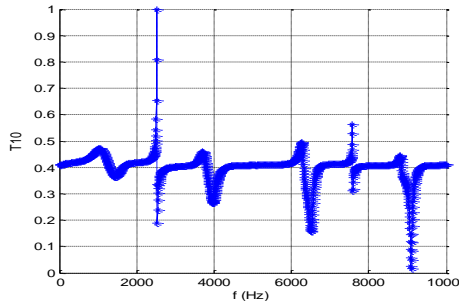
En absence de l'atténuation [8] :

$$|T_r|^2 + |R_r|^2 = 1 \Rightarrow |R_r|^2 = 1 - |T_r|^2 \quad (13)$$

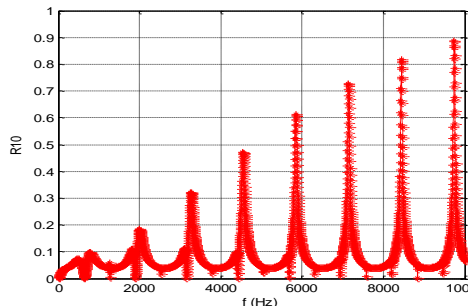
Où  $R_r, T_r$  sont respectivement les coefficients de réflexion et de transmission.

## 6-Résultats et discussion

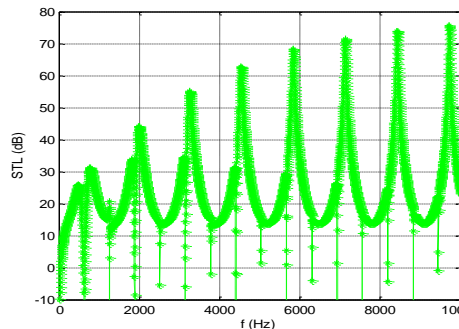
Un code numérique a été élaboré et différents types de coques multicouches peuvent être considérés. Les caractéristiques acoustiques des coques calculées sont représentées en fonction de la fréquence sur les figures suivantes :



**Figure 1 :** Coefficient de transmission en fonction de la fréquence



**Figure 2 :** Coefficient de réflexion en fonction de la fréquence.



**Figure 3 :** Perte de transmission en fonction de la fréquence.

Sur la figure 1, le coefficient de transmission présente des fluctuations dont l'amplitude diminue lors la fréquence augmente dans la gamme allant de 0 à 10000Hz alors que la figure 2 indique une augmentation d'amplitude du coefficient de réflexion avec l'augmentation de la fréquence. Cela traduit l'augmentation de l'amplitude de la perte de transmission sur la figure 3 avec l'augmentation de la fréquence. Ainsi, en prenant la variation de ces deux coefficients, la réflexion est très importante par rapport à la transmission. La coque ici se comporte donc comme un miroir acoustique parfaitement réfléchissant dans le domaine des hautes fréquences. Pour cela, dans

l'ingénierie, les coques peuvent être recommandées dans la construction car elles réfléchissent mieux les ondes venant de l'extérieur.

## Conclusion

Ce travail vise à déterminer les coefficients de réflexion et de transmission des ondes acoustiques dans les coques multicouches. Une méthodologie mathématique et numérique a été élaborée pour cette fin. Nous avons exploité la perte de transmission pour évaluer les coefficients de réflexion et de transmission. Nos résultats ont établi que les coefficients de réflexion des coques à double augmentent lorsque la fréquence augmente.

## Références

- [1] F. Xin, T. Lu, Analytical modeling of sound transmission across finite aeroelastic panels in convected fluids, *J. Acoust. Soc. Am.* 128 (2010) 1097-1107.
- [2] R. Talebitooti, R. Ahmadi, M. H. Shojaeefard, Three-dimensional wave propagation in orthotropic cylindrical shells with arbitrary thickness considering state space method, *compos. Struct.* 132 (2015) 239-254.
- [3] R. Talebitooti, M. Zarastand, M. Gheibi, Acoustic transmission through laminated composite cylindrical shell employing third order shear deformation theory in the presence of subsonic flow, *Compos. Struct.* 157 (2016) 95-110.
- [4] M. Ghassabi, R. Talebitooti, M. R. Zarastand, State vector computational technique for three-dimensional acoustic sound propagation through doubly-curved thick structure, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.* 352 (2019) 324-344.
- [5] H. H. Meuyou, F. P. Ewolo Ngak, G. E. Ntamack et L. Azrar, A virtual layers-states-space method for 3D responses of arbitrary functionally graded magneto-electro-elastic plates. *Composite Structures.* 268 (2021) 113782.
- [6] S. Brischetto, F. Tornabène, N. Fantuzzi, M. Baccocchi. Interprétation of boundary conditions in the analytical and numerical shell, solution for mode analysis of multi layered structures, *Int. J. Mech. Sci.* 122 (2017) 18-28.
- [7] L. A. Roussos, Noise transmission loss of rectangular plate in an infinite baffle, *J. Acoust. Soc. Am.* 75 (1984) S2-S3.
- [8] R. Talebitooti, M. Zarastand, H. Gohari, Investigating of power transmission across laminated composite doubly curved shell in the presence of external flow considering shear deformation shallow shell theory, *J. Vib. Control* (2017) 1077546317727655.
- [9] R. Talebitooti, M. Zarastand, M. Gheibi. Acoustic transmission through laminated composite cylindrical shell employing third order shear deformation theory in the presence of subsonic flow. *Compos. Struct.* 157 (2016) 95-110.

# CONTROLE ACTIF DES VIBRATIONS DES POUTRES A SECTION NON UNIFORME

## ACTIVE VIBRATION CONTROL OF NON-UNIFORM SECTION BEAMS

K. EL HARTI<sup>1</sup>, M. SANBI<sup>2</sup>, R. SAADANI<sup>1</sup>, I. KADIRI<sup>1</sup>, M. RAHMOUNE<sup>1</sup>

1. Laboratoire d'Etude des Matériaux Avancés et Applications, EST-FS, Université Moulay Ismail, Meknès

2. Ecole Nationale des Sciences Appliquées, Université Abdelmalek Essaadi, Tétouan

Auteur correspondant : elhartikhalid@gmail.com

### Abstract

This work presents the dynamics and active vibration control of a non-uniform Functionally Graded beam. The beam is equipped with layers of piezoelectric sensors and actuators, on different finite elements to see the influence of its location on the dynamics and active control. The study is based on the Euler-Bernoulli theory combined with the finite element method, applied to a flexible beam divided in a finite number of elements. The equations of motion are obtained by applying Hamilton's principle. The structure is modeled analytically and then numerically and the results of the simulations are presented to show the states of their dynamics.

### Résumé

Ce travail présente la dynamique et le contrôle actif des vibrations d'une poutre fonctionnellement graduée à section non-uniforme. La poutre est équipée de couches de capteurs et d'actionneurs piézoélectriques, sur différents éléments finis pour examiner l'influence de l'emplacement sur la dynamique et le contrôle actif. L'étude est basée sur la théorie d'Euler-Bernoulli combinée à la méthode des éléments finis, appliquée à une poutre flexible divisée en un nombre fini d'éléments. Les équations du mouvement sont obtenues en appliquant le principe de Hamilton. La structure est modélisée analytiquement puis numériquement et les résultats des simulations sont présentés pour montrer les états de leur dynamique.

**Mots clefs :** *FGM, piézoélectricité, Euler-Bernoulli, contrôle LQG-Kalman, section non uniforme.*

**Keywords:** *FGM, piezoelectricity, Euler-Bernoulli, LQG Control-Kalman, non-uniform section.*

### 1. Introduction

Au milieu des années 80, un groupe des scientifiques japonais ont introduit, pour la première fois, une nouvelle catégorie de composites, appelés matériaux

fonctionnellement gradués (FGM) [1]. Dans un matériau FGM, la composition et la structure changent progressivement en fonction du volume, ce qui entraîne des changements correspondants dans les propriétés du matériau [2]. En tant que matériaux résistant à des températures très élevées, ces types de composites sont bien connus et largement utilisés dans de nombreuses applications techniques. L'analyse des structures composites est exploitée avec les méthodes numériques avancées, notamment la méthode des éléments finis. En raison de la large application des FGM, plusieurs études ont été menées sur les comportements mécanique et thermique de ces matériaux. Des études théoriques et expérimentales approfondies ont été réalisées et publiées sur les structures en FGM, en particulier les poutres et sont toujours intéressantes pour les chercheurs en raison de leurs applications. El Harti et al. [3] ont étudié le contrôle actif des vibrations d'une poutre sandwich FGM avec un capteur/actionneur piézoélectrique avec une nouvelle géométrie. Ils ont aussi traité le contrôle actif de la poutre FGM poreuse Euler-Bernoulli sous une charge thermique avec des matériaux piézoélectriques liés symétriquement [4], ainsi que l'analyse dynamique et le contrôle actif de la poutre composite FGM piézoothermoélastique distribuée avec des porosités modélisées par la méthode des éléments finis [5].

Les structures non uniformes à section variable, en raison de leur capacité à répondre aux exigences architecturales particulières et à la répartition optimisée du poids et de la résistance, sont couramment utilisées dans diverses applications d'ingénierie, telles que les pales de rotor d'hélicoptère, les éoliennes, les hélices de navire, l'espace et structures marines, etc. Kumar et al. [6] ont examiné la vibration libre de grande amplitude de poutres minces coniques à gradient fonctionnel axial (AFG) dans différentes conditions aux limites. Huang et al. [7] ont présenté une approche unifiée pour analyser la vibration libre des poutres FGM avec une section transversale non uniforme basée sur la théorie des poutres de Timoshenko. Ozdemir et Kaya [8] ont utilisé la méthode de transformation différentielle pour étudier la vibration

de flexion d'une poutre Timoshenko encastree-libre conique en rotation.

## 2. Modèle mathématique

Une poutre FGM non uniforme de longueur  $L$  avec une hauteur  $h$  constante, et la largeur  $b(x)$  est considérée variable dans cette étude. Les équations générales pour l'aire de la section transversale  $A(x)$ , la largeur  $b(x)$  et le moment d'inertie  $I_y(x)$  de la poutre sont données par :

$$\begin{aligned} b(x) &= b_0 \left(1 - C_b \frac{x}{L}\right)^m \\ A(x) &= A_0 \left(1 - C_b \frac{x}{L}\right)^m \\ I_y(x) &= I_{y0} \left(1 - C_b \frac{x}{L}\right)^m \end{aligned} \quad (1)$$

Le rapport de conicité de largeur ( $C_b$ ) doit satisfaire  $0 \leq C_b < 1$  pour s'assurer que  $A(x)$  et  $I_y(x)$  sont positifs. En connaissant les quantités de largeur à l'encastrement et à l'extrémité libre de la poutre, le rapport de conicité de largeur peut être calculé comme suit :

$$C_b = 1 - \frac{b}{b_0} \quad (2)$$

Dans la présente étude, la valeur de  $m$  est fixée à 1 pour modéliser la poutre qui se rétrécit linéairement. Les quantités d'aire de section transversale et le moment d'inertie à l'encastrement de la poutre peuvent être écrits comme suit :

$$A_0 = b_0 h \quad I_{y0} = \frac{b_0 h^3}{12} \quad (3)$$

Dans cette étude, la loi de puissance est considérée pour décrire la variation des propriétés du matériau du métal pur à la face inférieure  $z = -h/2$  jusqu'à la céramique pure à la face supérieure  $z = +h/2$  de la poutre.

$$V_c = \left(\frac{z}{h}\right)^k = 1 - V_m \quad (4)$$

Où  $V_c$  et  $V_m$  sont les fractions volumiques des constituants céramiques et métalliques respectivement et  $k$  est l'exposant de la fraction volumique qui dicte le profil de variation du matériau dans l'épaisseur de la poutre.

Par conséquent, les propriétés matérielles de la poutre, c'est-à-dire le module de Young  $E$  et la densité de masse  $\rho$ , varient continuellement dans le sens de l'épaisseur.

$$\begin{aligned} E(z) &= E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h}\right)^k \\ \rho(z) &= \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h}\right)^k \end{aligned} \quad (5)$$

En considérant la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli, les déplacements axiaux et transversaux,  $u$  et  $w$ , de tout point de la poutre sont donnés par :

$$u(x, y, z, t) = z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad v(x, y, z, t) = 0 \quad (6)$$

$$w(x, y, z, t) = w(x, t)$$

Les composantes de contrainte et de déformation correspondant au déplacement sont données par :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (7)$$

$$\sigma_{xx} = Ez \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (8)$$

L'application du principe de Hamilton généralisé donne :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T + W) dt = 0 \quad (9)$$

L'énergie de déformation du système ( $U$ ) peut être exprimée comme suit :

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx}) dV = \frac{1}{2} \iiint_V E z^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dV \quad (10)$$

L'énergie cinétique du système ( $T$ ) est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dV = \frac{1}{2} \int_0^l \int_A \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dA dx \quad (11)$$

Le travail effectué par la force transversale distribuée  $f(x, t)$  est donné par :

$$W = \int_0^l f w dx \quad (12)$$

La dynamique due au comportement de déformation de la poutre est gouvernée par l'équation différentielle d'ordre quatre suivante :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = f_{ext} \quad (13)$$

La solution de l'équation est supposée avoir une forme cubique en fonction de  $x$  et s'écrit :

$$w(x, t) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \quad (14)$$

Basé sur les hypothèses d'Euler-Bernoulli, et en utilisant des conditions aux limites pour deux degrés de liberté par nœud, la forme finale de  $w(x, t)$  devient :

$$\begin{aligned} [(w(x, t))] &= [f_1(x) \quad f_2(x) \quad f_3(x) \quad f_4(x)] \times \\ [w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2]^T &= [n^T][q] \end{aligned} \quad (15)$$

avec

$$[(\dot{w}(x, t))] = [n_1^T][\dot{q}] \quad (16)$$

$$[(w''(x, t))] = [n_2^T][q] \quad (17)$$

$$[\dot{w}(x, t)] = [n_3^T][\dot{q}] \quad (18)$$

L'équation du mouvement de l'élément à deux nœuds est obtenue en remplaçant les équations (10) et (11) dans l'équation de Lagrange suivante :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right] + \left[ \frac{\partial U}{\partial q_i} \right] = [Z_i] \quad (19)$$

Equation (19) devient :

$$M \dot{q} + K q = f(t) \quad (20)$$

## 3. Équation dynamique et modèle d'espace d'état

Afin de s'intéresser au contrôle des premiers modes de vibration, nous avons utilisé la transformation  $q = Tg$ , avec  $T$  étant la matrice modale et  $g$  les coordonnées principales. Considérons l'amortissement proportionnel de Rayleigh suivant :

$$C = \alpha M + \beta K \quad (21)$$

L'équation de dynamique de la structure et l'équation de commande sont présentées par :

$$M^* \ddot{g} + C^* \dot{g} + K^* g = f_{ext}^* + f_{ctr1}^* + f_{ctr2}^* \quad (22)$$

$$y(t) = V^s(t) = p^T T \dot{g} \quad (23)$$

Le modèle d'espace d'état en mode MIMO de la poutre, pour les premiers modes vibratoires est donné par :

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + Er(t) \quad (24)$$

$$y(t) = C^T x(t) + Du(t) \quad (25)$$

#### 4. Résultats et discussion

Afin de valider la procédure de contrôle, nous considérons une poutre à section non uniforme flexible encastrée à son extrémité gauche, constituée du matériau FGM et partiellement couverte par de couches de matériau piézoélectrique. La poutre est soumise à une force externe sous forme d'une impulsion d'amplitude

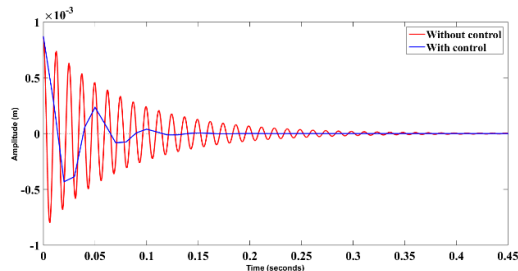


Figure 1 : Réponse à une impulsion (Actionneurs sur l'EF2,  $b=2$ )

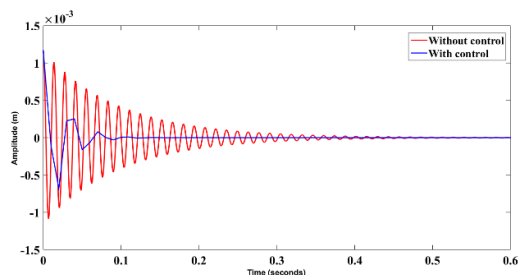


Figure 3 : Réponse à une impulsion (Actionneurs sur l'EF3,  $b=2.5$ )

#### Conclusion

Nous avons étudié l'analyse théorique de la vibration et de son contrôle actif d'une poutre intelligente à section non uniforme. L'analyse des résultats montre que la diminution du rapport de conicité (figure 1 et 2), ainsi que le déplacement d'actionneurs vers l'extrémité libre (figures 2 et 3) impliquent des augmentations des amplitudes des vibrations. A partir de la figure 4, la diminution du rapport de conicité implique des augmentations en fréquences des vibrations, par contre, l'augmentation de l'indice de puissance ainsi que le déplacement d'actionneur vers l'extrémité libre impliquent des diminutions au niveau des fréquences des vibrations. Nous avons également montré la fiabilité de notre procédure de contrôle optimal LQG accompagnée du filtre de Kalman.

#### Références

- [1] M. Koizumi, *FGM activities in Japan*, Compos. Part B Eng, 28, (1997), 1-4.
- [2] I. Bharti, et al., *Novel Applications of Functionally Graded Nano, Optoelectronic and Thermoelectric Materials*, Int. J. Mater. Mech. Manuf. (2013), 221-224.

(1N) appliquée pendant une durée d'une seconde à l'extrémité libre de chaque modèle. Les figures ci-dessous montrent la réponse impulsionnelle de la poutre. Dans tous les résultats, nous comparons les réponses contrôlées et non contrôlées, en variant l'emplacement d'actionneurs piézoélectriques ainsi que le rapport de conicité, et l'indice de puissance  $k = 1$ .

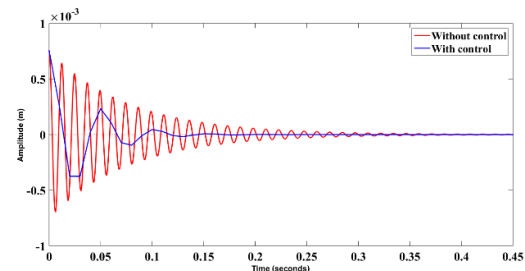


Figure 2 : Réponse à une impulsion (Actionneurs sur l'EF2,  $b=2.5$ )

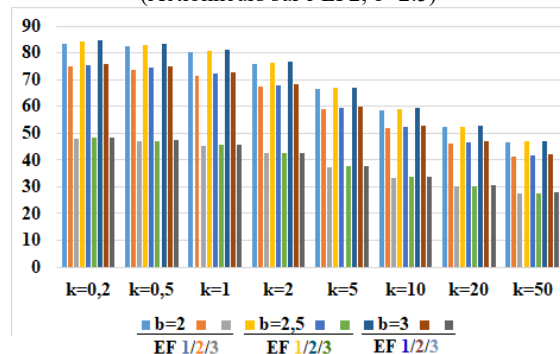


Figure 4 : variation des fréquences de vibration (Hz) en fonction de l'indice de puissance  $k$ , d'emplacement d'actionneurs piézoélectriques et de rapport de conicité.

- [3] K. El Harti et al., *Active vibration control of sandwich FGM beam with piezoelectric sensor/actuator*, Int. J. Appl. Eng. Res, 12, (2017) 9338-9345.
- [4] K. El Harti et al., *Dynamic control of Euler-Bernoulli FG porous beam under thermal loading with bonded piezoelectric materials*, Ferroelectrics, 558.1, (2020) 104-116.
- [5] K. El Harti et al., *Dynamic analysis and active control of distributed piezothermoelastic FGM composite beam with porosities modeled by the finite element method*, Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal 12.1, (2021).
- [6] S. Kumar, et al., *Geometrically Nonlinear Free Vibration Analysis of Axially Functionally Graded Taper Beams*, Engineering Science and Technology, an International Journal, 18, (2015), pp.579-593.
- [7] Y. Huang, et al., *Free Vibration of Axially Functionally Graded Timoshenko Beams with Non-Uniform Cross-Section*, Composites Part B: Engineering, 45, (2013), pp. 1493-1498.
- [8] O. Ozgumus, et al., *Vibration Analysis of a Rotating Tapered Timoshenko Beam Using DTM*, Meccanica, 45, (2010), pp. 33-42.

## Dynamic response of a partially clamped simply supported railway bridge under moving trains: Resonance and cancellation phenomena.

SAID EL HANKARI\*, RACHID DKIOUAK, and KHALID ROKY

Laboratory Mechanical and Civil Engineering, UAE/U17FST, Faculty of Sciences and Techniques, University Abdelmalek Essaadi, 90000 Tangier, Morocco

[elhankari.said@gmail.com](mailto:elhankari.said@gmail.com)

[rdkiouak@hotmail.com](mailto:rdkiouak@hotmail.com)

[Kh.roky@fstt.ac.ma](mailto:Kh.roky@fstt.ac.ma)

### Abstract

Since the development of new railway lines of high speed, the dynamic response of bridges belonging to them constitutes a subject interest for researchers and engineers, in particular that at resonance which is a phenomenon occurs when the excitation frequency coincides with the proper frequency of the bridge. In the present work, an analytical approach is developed to analyze the dynamic response of a single ballasted track railway bridges leaning on identical rotational springs and subjected to the circulation of moving loads at constant speeds. In this work a dynamic analysis for the conditions for maximum response and cancellation in free vibration are derived and interpreted. Equating the condition for resonance of maximum free response and cancellation, cancelled resonance are obtained.

**Keywords:** Resonance and cancellation, ballasted track, partially clamped beam, dynamics.

### 1. Introduction

Nowadays, high-speed train plays an important role in the public transportation strategy of the states. Thus, vertical acceleration in the platform of short or long railway bridges in high-speed lines is still a matter of concern. As dynamic analyzes and experimental tests have shown that vertical acceleration is responsible for this result, these analyzes were carried out by the European Railway Research Institute (EERRI) [1]. So from this, we conclude that the deck vertical acceleration is among the most important specifications required for the design and evaluation of short railway bridges, which have been identified as  $3.5m/s^2$  for ballast tracks [2]. Therefore, the development of precise models working to respect this acceleration factor has become important in applications. So the dynamic performance of railway bridges is playing an increasingly important role in public transportation systems due to the extensive construction of new high-speed lines and the use of old high-speed lines. The regular and repetitive nature of the wheel loads can induce or generate in the railway bridge a resonance situation accompanied with higher acceleration amplitudes. For this latter, it is necessary to continuously modernize the railway infrastructure and

especially the bridge structures. Even the axle loads of modern trains are not greater than the forces transmitted in older vehicles, higher design speeds can lead to the occurrence of resonance phenomena. Resonance in a railway bridge occurs when the excitation frequency of the periodic loading of a train approaches a natural frequency of the bridge. In this case, the loads enter the bridge in phase with the natural vibrations of the structure, resulting in a progressive increase in the vibration response of the deck.

In the reported works, Museros et al. [3], based on an analytical approach, analyzed and studied the free vibration response of simply and elastically supported beams under moving constant and moving loads, in which the conditions of resonance and cancellation are proved. Resonance vibrations have been observed on railway bridges subjected to high-speed trains. An elementary theoretical model of a bridge has been studied using the integral transformation method, which provides an estimate of the amplitudes of the free vibration. Besides, the analysis gives the critical speeds at which resonant vibration can occur. They are caused by two main reasons: the repeated action of axle loads and the high speed itself [4]. Moreover, it is reported in a work that generally consists of studying the effect of the continuity of the ballasted track on the dynamic response of simply supported railway bridges shows that the carriage of a ballast layer and other track components (rails, sleepers) may incite a dynamic coupling effect between the bridge spans or adjacent decks and assess the influence of the track components and its continuity on the response to the acceleration of the bridge under the passage of railway convoys [5].

For this reason, in this study, the interest is to analyze the effect of the continuity of the ballasted track in the maximum dynamic response of the bridge (acceleration, displacement) due to rail traffic which is a criterion of ballast stability in the case of a ballasted track, where by taking into account an axial force, simply supported partially clamped (SSPC) beam is studied. The situations of maximum resonance response and cancellation of the aforementioned two models and the condition when the maximum response cancelled are analyzed.



## 2. Basic assumption and problem formulation

In a system of soil-structure interaction and in railway lines particularly, the difference in the stiffness at the area of interaction ground-pillar or ground-bridge generates a bending moment at the ends of the structure during the passage of high-speed trains. To analyze this phenomenon and its influence on the dynamic response of the given system, a more realistic schematization and modeling of the studied system is necessary.

In this section, as cited previously, to understand the track's continuity effects in the dynamic response of a simply supported bridge, the studied bridge is modeled by an Euler-Bernoulli (E-B) simply supported partially clamped beam, as shown in Fig. 1, which connected in its end's by two rotational springs with a constant stiffness  $K_r$ , and an axial Force  $F_s$  is presented which simulate the effect of prestressing, ballast interface, axial displacement, force braking.

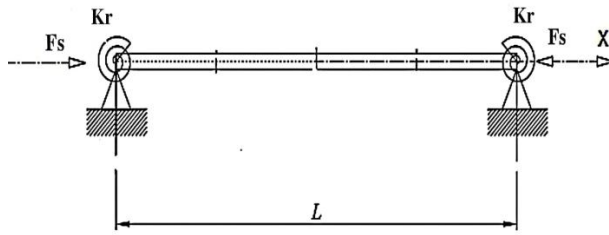


Figure 1. Simply supported partially clamped beam.  
By neglecting the damping ratio, the problem of

the partial differential governing equation of the system is given by

$$EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} - F_s \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = p(x,t) \quad (1)$$

With  $v(x,t)$  is the vertical displacement of the beam structure,  $F_s$  is the axial force,  $EI$ ,  $m$  and  $p(x,t)$  are the bending stiffness, the mass per unit length of the bridge, and the vertical force acting in the structure which is assumed to be constant where the vehicle-bridge interaction effects are neglected, then the moving load model HSLM-A is chosen here, which is expressed as follows:

$$p(x,t) = \sum_{k=1}^N P_k \left( H \left( t - \frac{d_k}{c} \right) - H \left( t - \frac{d_k + L}{c} \right) \right) \delta(x - ct + d_k) \quad (2)$$

The loads presented through Dirac delta function acting along  $(x_v = ct - d_k)$ , where  $c$  is the constant train speed,  $d_k$  is the distance when  $t = 0$  from the  $k$ th to the entrance of the beam,  $N$  is the total number of axle

loads,  $P_k$  the value of the  $k$ th load,  $H$  is the Heaviside function and  $L$  stands for the beam length.

And the pertaining boundary conditions:

$$M_{r,0} = -\frac{\partial W_{r,0} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)}{\partial \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)}, \quad M_{r,L} = \frac{\partial W_{r,L} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)}{\partial \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)} \quad (3a)$$

$$\text{Where } W_{r,0} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2} K_r \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=0}^2 \quad (3b)$$

$$W_{r,L} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2} K_r \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=L}^2$$

the amplitude of the  $i$ th modal response of the beam is:

$$R_n = \frac{1}{q_{st}} \sqrt{q_i^2 \Big|_{t=\frac{L}{c}} + q_i^2 \Big|_{t=\frac{L}{c}}} \quad (4)$$

Where  $q$  and  $q_{st}$  are the analytical solution and static solution respectively.

From the Eq.(4) where we have  $R_n = f(K_n)$ , the condition of cancellation and maximum free vibration speeds may be calculated as:

$$\frac{\partial R_n}{\partial K_n} = 0 \Rightarrow K_n^{mi}; \quad R_n = 0 \Rightarrow K_n^{ci}; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Where  $K_n^{mi}$  and  $K_n^{ci}$  are the speed parameter for the  $i$ -th maximum free vibration and  $i$ -th cancellation condition in mode  $n$ , respectively.

## 3. Numerical results

Table 1 includes the values of  $K_{ni}^m$  numerically computed from eq.(5) for  $n=1$  and  $i=1, 2, 3, 4$  in the range of  $k = \{0, 0.1028, 1.028, 10.28\}$ .  $k$  is the ratio of the rotational stiffness of the rotational springs to the flexural rigidity of the beam  $k = \frac{K_r L}{4EI}$ , this range is

obtained for:  $K_r = \{0, 4.47 \times 10^8, 4.47 \times 10^9, 4.47 \times 10^{10}\} N.m$  with  $EI = 1.63 \times 10^{10} N.m^2$  [7]. The results obtained for  $k=0$  (S-S case) correspond to those provided by Museros [3].

Conditions of cancellation of resonance:

$$V_{nj}^r = \frac{d}{jT_n} = \frac{\omega_n d}{2\pi j} \quad n, j = 1, 2, \dots \quad (6)$$

$$K_{nj}^r = \frac{n\pi V_{nj}^r}{\omega_n L} = \frac{nd}{2jL} \quad n, j \geq 1 \quad (7)$$

Cancellation of resonance is the coincidence between the speed of resonance and cancellation. if the speed provided by eq.(7) coincides with any of the roots of eq.(4) the resonance of the simply supported partially clamped beam is cancelled, i.e:

$$K_{nj}^r = K_{ni}^c \Rightarrow \left( \frac{L}{d} \right)_{nji}^c = \frac{r_i L}{2\pi j K_{ni}^c}; \quad n, j, i = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Table 1. Speed parameters for cancellation  $K_{ni}^c$  and maximum free vibration response  $K_{ni}^m$  corresponding to the first mode of vibration for  $k = \{0, 0.1028, 1.028, 10.28\}$

$k$	$K_{li}^c$			
	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
0	0.3333	0.2000	0.1429	0.1111
0.1028	0.3432	0.2062	0.1480	0.1152
1.028	0.3809	0.2367	0.1712	0.1339
10.28	0.4000	0.2572	0.1904	0.1513

$k$	$K_{li}^m$			
	$\bar{K}_1^m$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
0	0.3860	0.2576	0.1687	0.1258
0.1028	0.3960	0.2660	0.1747	0.1304
1.028	0.4310	0.3015	0.2013	0.1513
10.28	0.4410	0.3329	0.2252	0.1713

**4. Case study**

The dynamic performance of a 15m bridge is investigated [12], the upper beam has a Natural frequency  $f_{ib} = 8.92Hz$ , linear mass  $m = 10,000kg/m$ , rotational stiffness  $K_r = 4.47 \times 10^8 N.m$  and a modal damping ration  $\xi = 1.35\%$  with take into account an Axial force  $F_s = 5.37MN$ .

Figure 2 represent in terms of the ratio  $V/d$  the maximum vertical acceleration under the load model HSLM-A8 at mid-point section, the maximum resonances take place at  $V/d = f_{ib}/1, f_{ib}/2, f_{ib}/3$ . In the case of  $d = 19.84m$  calculated by Eq.(8) the second resonant peak completely disappears. That for distance between 19m and 25m, for distance large than 25m figure 3 represent the maximum acceleration for distance between 28m and 34m. In this case for the same interval of velocity  $V \in [100, 450] Km/h$  the results shown only the third and four peak of resonance, so for the distance calculated by eq.(8)  $d = 29.76m$  the third resonance completely disappears.

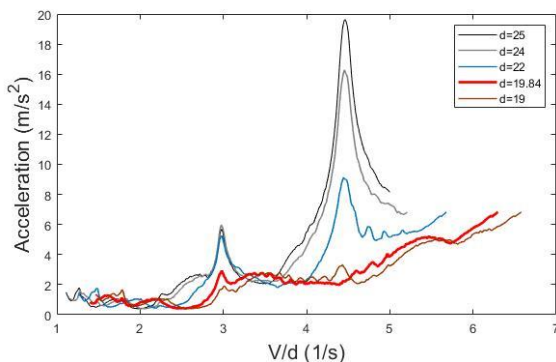


Figure 2. Maximum acceleration values as a function of  $V/d$ ; cancellation of the second resonance.

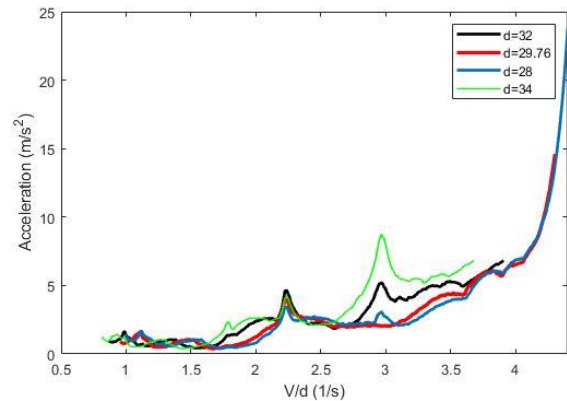


Figure 3. Maximum acceleration values as a function of  $V/d$ . Cancellation of the third resonance.

**5. Conclusion**

To summarize, the dynamic response of a simply supported partially clamped beam have been studied, the condition leading to the situation of maximum response and cancellation are derived for particular nondimensional speeds of the load, the results indicate a cancelled resonance are obtained and the effectiveness of the proposed model in order to absorb the resonance phenomena in high-speed railway bridges.

**References**

- [1] ERRI-D-214/RP9. Ponts Rails pour vitesses > 200km/h. Rapport final. Brussels: European Committee for Standardization; 2000.
- [2] European Committee for Standardisation (CEN), Eurocode: Basis of Structural Design. Annex A2: Application for bridges, Final PT Draft EN 1990—prAnnex A2 (pre-European Standard), 2002.
- [3] Museros P, Moliner E, Martinez-Rodrigo M.D., (2013). Free vibrations of simply-supported beam bridges under moving loads: Maximum resonance, cancellation and resonant vertical acceleration. *Journal of Sound and Vibration*. 333, 326-345.
- [4] L. Fryba, A rough assessment of railway bridges for high speed trains, *Engineering Structures* 23 (2001) 548–556.
- [5] M.D. Martinez-Rodrigo, A. Romero, E. Moliner, J. Chorda, P. Galvin, Influence of ballast track on vertical response of multispan simply-supported bridges under railway traffic, *ICCES 2020: The 26th International Conference on Computational & Experimental Engineering and Sciences*, 2020.
- [6] Lavado J, Domenech A, Martinez-Rodrigo M.D., (2014). Dynamic performance of existing high-speed railway bridges under resonant conditions following a retrofit with fluid viscous dampers supported on clamped auxiliary beam. *Engineering Structures*, 59, 355-374.

# Large Amplitude Dynamics of Beams on Nonlinear Fractional Viscoelastic Foundation Subjected to Moving Load

A. OUZIZI\*<sup>1</sup>, F. ABDOUN\*\*<sup>1</sup>, L. AZRAR\*\*\*<sup>1,2</sup>

1. Research Center STIS, M2CS, ENSAM Rabat, Mohammed V University in Rabat, Morocco.

\*anas.ouzizi@gmail.com; \*\*farah.abdoun@ensam.um5.ac.ma

2. Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, King Abdulaziz University, Jeddah, Saudi Arabia.

\*\*\*l.azrar@um5r.ac.ma

## Abstract:

In the present study, the nonlinear dynamic analysis of beams on fractional order viscoelastic nonlinear foundation subjected to a moving load is elaborated. The D'Alembert principle is used to derive the governing equation using a large amplitude nonlinear Winkler foundation and the Caputo fractional viscoelastic model. Multimodal analysis is used and large number of modes is required for convergence. A numerical procedure is elaborated to solve the resulting fractional derivative nonlinear system. A parametric study is conducted with the focus on the effects of the fractional derivative order and the nonlinear parameters. It is revealed that the order of the fractional derivative and nonlinear foundation have significant effects on the vertical deflection of the beam and its dynamic behaviours is investigated.

**Keywords:** *Nonlinear dynamics, Fractional viscoelasticity, Nonlinear foundation, Moving load.*

## 1 Introduction

Structures subjected to moving loads are often used in engineering practice especially in railway engineering, highway industry and track design optimization such as bridges, railway engineering equipment and so on. In most of the published works, the foundations are assumed as linear elastic ones. It is more appropriate to consider the nonlinear foundation, such as cubic types [1]. Ding et al. [2] investigated the convergence of the Galerkin method for the dynamic response of finite beams. Azrar et al. [3] investigated the nonlinear forced vibrations of beams using a multimodal approach.

During the last decades, fractional calculus has received considerable attention among mathematicians, physicists and engineers [4]. A particular interest in fractional derivation is dedicated to the mechanical modelling of rubbers, elastomers and all kinds of materials that retain the memory of past deformations [5]. Moreover, the work of Tabejieu et al. [6] is based on the dynamics of Rayleigh beams resting on a fractional order viscoelastic Pasternak foundation subjected to moving loads. A fractional damping is utilized in dynamical analysis of beams under mov-

ing loads [7, 8].

The aim of this work is the investigation of the large amplitude dynamic analysis of beams on a nonlinear fractional viscoelastic foundation subjected to a moving load based on the multi-modal analysis. The resulting nonlinear fractional differential system is solved by an elaborated and well adapted numerical method based on the finite difference and a discrete fractional derivative approximation.

## 2 Problem formulation

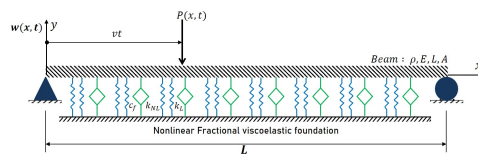


Figure 1: Sketch of a Beam on fractional viscoelastic foundation under moving load.

The system under investigation is beam of length  $L$  in  $X$  direction with a geometric non-linearity. The beam is resting on a nonlinear fractional derivative viscoelastic foundation and subjected to a moving load, as shown in Fig.1. Homogeneous beam with a constant cross-section  $A$ , a density  $\rho$ , a moment of inertial  $I$  and Young modulus of elasticity  $E$  is considered. The foundation is taken as a nonlinear Winkler's foundation with linear plus cubic stiffnesses and viscous and fractional damping. The governing partial differential equation of motion for the beam is obtained:

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} + EI \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} - \frac{EA}{2L} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \int_0^L \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right)^2 dX \\ + k_L W(X, T) + c_f \frac{\partial W(X, T)}{\partial T} + k_{NL} W^3(X, T) \\ + \mu D_T^\alpha W(X, T) = P \delta(X - VT) \end{aligned} \quad (1)$$

where  $W(X, T)$  is the transversal displacement,  $P$  represents the intensity of the external moving and concentrated load with velocity  $V$  and  $\delta$  is the Dirac delta function to handle the concentrated moving load.  $k_L$ ,  $k_{NL}$  and  $c_f$  are the linear stiffness, the cubic nonlinear stiffness and the viscous damping coefficient of the foundation, respectively. In addition,  $D_T^\alpha[\cdot]$  is considered to be the Caputo's

fractional derivative of order  $\alpha$  given as follow

$$D_T^\alpha[f] = \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_0^T \frac{1}{(T-u)^{\alpha+1-k}} \frac{\partial^k f(u)}{\partial T^k} du \quad (2)$$

where  $k \in \mathbb{N}$  such that  $(k-1 \leq \alpha < k)$  and  $\Gamma(z)$  is the Gamma function. Using some dimensionless variables the nonlinear fractional partial differential equation is given as

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k_f \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_0^1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + c_f \frac{\partial w}{\partial t} + k_{LW} + k_{NL} w^3 + \mu D_t^\alpha[w] = P\delta(x-vt) \quad (3)$$

where  $x$  and  $L$  are the dimensionless spatial coordinate and the beam length, respectively, and  $t$  is the dimensionless time. To treat the fractional derivative term of Eq. (3), we used a discrete approximation method for the computation of Caputo's fractional derivative given by the following expression for  $(0 < \alpha \leq 1)$ :

$$D_t^\alpha f^m = \sigma_{\alpha,h} \sum_{j=1}^m w_j^\alpha (f^{(m-j+1)} - f^{(m-j)}), \\ \sigma_{\alpha,h} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{(1-\alpha)} \frac{1}{h^\alpha}, w_j^\alpha = j^{1-\alpha} - (j-1)^{1-\alpha}.$$

and for  $(1 \leq \alpha < 2)$ :

$$D_t^\alpha f^m = \sigma_{\alpha,h} \sum_{j=1}^m w_j^\alpha (f^{(m-j+2)} - 2f^{(m-j+1)} + f^{(m-j)}), \\ \sigma_{\alpha,h} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{(2-\alpha)} \frac{1}{h^\alpha}, w_j^\alpha = j^{2-\alpha} - (j-1)^{2-\alpha}.$$

### 3 Multimodal procedure

In order to apply the Galerkin method, the displacement function  $w(x, t)$  can be written into finite series as follows:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^N q_n(t) \phi_n(x) \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4)$$

where  $q_n(t)$  are the unknown time-dependent coefficients to be determined,  $\phi_n(x)$  is the basis (test) functions which must satisfy the boundary conditions and  $N$  is the number of contributed modes. The first  $N$  vibration modes are considered in Eq. (4). Substituting Eq. (4) into Eq. (3) and multiplying both sides of Eq. (3) by the weight functions  $\phi_i(x)$  and integrating it over the interval of 0 and 1, the following set of  $N$  nonlinear fractional second-order ordinary differential equations (ODEs) are obtained:

$$\ddot{q}_i(t) + c_f \dot{q}_i(t) + \mu D_t^\alpha[q_i(t)] + [k_L + k_f^2(i\pi)^4]q_i(t) - \\ \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N q_a(t)q_b(t)q_c(t) \int_0^1 \left[ \phi_a''(x) \int_0^1 \phi_b'(x)\phi_c'(x) dx \right] \phi_i(x) dx \\ + 2k_{NL} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N q_a(t)q_b(t)q_c(t) \int_0^1 \phi_a(x)\phi_b(x)\phi_c(x)\phi_i(x) dx \\ = 2P \sin \left[ i\pi \left( vt \pm \left( \frac{\xi t^2}{2} \right) \right) \right], \quad (5)$$

Eq. (5) is used to analyse the nonlinear dynamics of beams on the fractional order viscoelastic nonlinear foundation subjected to moving load based on the finite difference method's algorithm and a discrete fractional derivative approximation. To do so a well adapted algorithm and numerical procedure are elaborated. The transverse displacement of the beam  $w(x, t)$  is thus numerically obtained by using an elaborated Matlab code based on the proposed approach, the transverse displacement is obtained after the convergence of the number of mode  $N$  for various moving loads, fractional orders and geometrical parameters.

## 4 Results & Discussion

### 4.1 Validation

In this section, an example of beam on a nonlinear foundation under a moving load with a constant velocity is firstly considered to test the validity of the presented methodological approach with available results. The beam considered in this model is assumed to be simply supported at both ends. In the present investigation, the test function and the weight function are both chosen as eigenfunctions of the beam-foundation with simply supported boundary conditions given by  $\phi_n(x) = \sin(n\pi x)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots, N$ . For that aim our procedure is used by disregarding the fractional derivative term ( $\mu = 0$ ). The displacement response for the beam versus the normalized time is shown in Fig. 2. These results are well compared and demonstrate the nonlinear effect on the response.

Fig. 2 show the dynamic mid-span displacement response of the beam when the order of the fractional derivative of is assumed to be unity; that is,  $\alpha = 1$  and for number of modes  $N = 200$ .

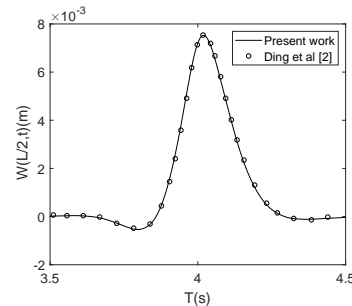


Figure 2: The vertical displacement at mid span of the beam in nonlinear foundation model.

### 4.2 Application

For a realistic application, the beam is assumed to be the UIC60 European high-speed rail. Material properties of the rail, mechanical parameters of the foundation and the moving load are taken from [2]. The vertical deflection of the rail with different positions of the moving load were

plotted when  $N = 40$ -mode and the moving load speed  $V = 20$  m/s. The obtained vertical deflection of beam mid-span with time is illustrated in Fig.3 showing the effect of the order of fractional derivative ( $0.2 \leq \alpha \leq 1.6$ ) on the transverse deflection. The maximum mid-span beam displacement increases when decreasing the order of fractional derivative  $\alpha$  and that depends also on the foundation parameters. These figures show clearly the influence of the fractional order derivative on the time response.

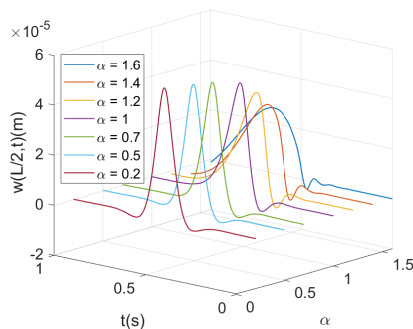
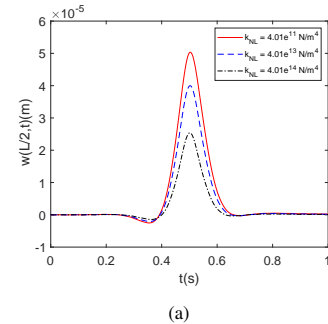
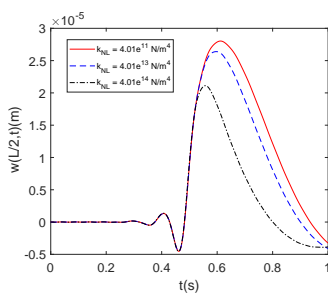


Figure 3: The effect of the fractional order  $\alpha$  on the vertical displacements of the rail's midpoint.



(a)



(b)

Figure 4: Effects of the nonlinear stiffness on the vertical displacements of the rail's midpoint : (a)  $\alpha = 0.5$ ; (b)  $\alpha = 1.5$ .

Fig.4 demonstrates the vertical deflection of a simply supported beam with different values of system parameters for the order of fractional derivative  $\alpha = 0.5, 1.5$ . Fig.4 show that the vertical displacements decrease with growing of the nonlinear foundation parameters  $k_{NL}$  for both value of fractional order  $\alpha$ .

## 5 Conclusion

In this study, the nonlinear dynamic response of a beam with large amplitudes and resting on a fractional order viscoelastic Winkler nonlinear foundation is investigated. The Galerkin scheme is used to reduce the resulting fractional partial differential model to a coupled nonlinear fractional differential system. The finite difference method and fractional discretization procedure are used for numerical solution. Also, the effect of the order of fractional derivative  $\alpha$  on the maximum central deflection of the beam is conducted. It is found that the maximum of vertical deflection is hardly dependent on the fractional order derivative as well as on the linear foundation parameter.

## Acknowledgments

This research work is on the frame of the PPR2/06/2016 project. We acknowledge with thanks the CNRST and the Moroccan Ministry of Higher Education and Scientific Research financial support.

## References

- [1] K. Kanaka Raju, and G. Venkateswara Rao, *Effect of a non-linear elastic foundation on the mode shapes in stability and vibration problems of uniform columns/beams*, Journal of Sound and Vibration, 160.2(1993):369-371.
- [2] H. Ding, L.Q. Chen, & S. Yang, *Convergence of Galerkin truncation for dynamic response of finite beams on non-linear foundations under a moving load*, Journal of Sound and Vibration, 331.10(2012):2426-2442.
- [3] L. Azrar, R. Benamar, & R.G. White, *A semi-analytical approach to the non-linear dynamic response problem of beams at large vibration amplitudes, part ii: multi-mode approach to the steady state forced periodic response*, Journal of Sound and Vibration, 255.1 (2002):1-41.
- [4] A.A. Kilbas, H. M. Srivastava, & J.J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, 204, elsevier, 2006.
- [5] A.W. Wharmby, & R.L. Bagley, *Generalization of a theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity*, Journal of Rheology, 57.5(2013):1429-1440.
- [6] L.A. Tabejieu, B.N. Nbandjo, & P. Woafu, *On the dynamics of Rayleigh beams resting on fractional-order viscoelastic Pasternak foundations subjected to moving loads*, Chaos, Solitons & Fractals, 93(2016):39-47.
- [7] R. Lewandowski, & P. Wielentejczyk, *Nonlinear vibration of viscoelastic beams described using fractional order derivatives*, Journal of Sound and Vibration, 399(2017):228-243.
- [8] A. Ouzizi, F. Abdoun, & L. Azrar, *Nonlinear dynamics of beams on nonlinear fractional viscoelastic foundation subjected to moving load with variable speed*, Journal of Sound and Vibration, (2022):116730.

## Étude de vibration libre des plaques poreuses fonctionnellement graduées en utilisant la théorie de déformation de troisième ordre (TSDT)

M. Janane Allah<sup>1</sup>, A. Timesli<sup>1</sup>, Y. Belaasilia<sup>1</sup>

1. Université Hassan II de Casablanca, ENSAM Casablanca, Laboratoire AICSE, 20670 Casablanca, Maroc.  
mohamed.jananeallah-etu@etu.univh2c.ma, ABDELAZIZ.TIMESLI@univh2c.ma, belaasilia@gmail.com

### Résumé

Ce travail vise à étudier l'effet de la distribution de la porosité sur la réponse de vibration libre des plaques en matériau fonctionnellement gradué (Functionally Graded Material (FGM)). Les propriétés des FGMs sont obtenues à partir de différentes lois régissant la variation des propriétés matérielles telles que : la loi de puissance, la loi sigmoïde et la loi exponentielle. D'autre part, différents types de distribution de porosité sont utilisés pour ces plaques à gradient fonctionnel en vibration libre. Les équations du mouvement sont obtenues par le principe de Hamilton. Une formulation variationnelle basée sur la théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre (Thirdorder Shear Deformation Theory (TSDT)) est utilisée. En analyse numérique, la méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre numériquement les problèmes aux valeurs propres et trouver les fréquences propres.

**Mots clefs :** *déformation de troisième ordre / matériaux fonctionnellement gradués / plaques poreuses / vibration libre*

### 1. Introduction

De nos jours les FGMs sont utilisés dans de nombreuses applications thermiques et mécaniques [1-5]. Ces matériaux représentent un saut technologique rapide dans divers domaines d'application potentiels. Contrairement aux matériaux homogènes, les propriétés des matériaux à gradient fonctionnel varient à travers l'épaisseur de manière graduelle et continue selon différentes lois régissant la variation des propriétés matérielles, à savoir la loi de puissance (P-FGM), la loi sigmoïde (S-FGM) et la loi exponentielle (E-FGM). L'objectif de ce type de matériaux est d'améliorer les performances mécaniques et thermiques des structures. Ces dernières années, plusieurs études et analyses ont été menées sur la vibration libre des structures (coques, plaques, poutres, etc.) poreuses fabriquées en FGM. Dans ce cadre, il est nécessaire de choisir une théorie appropriée qui puisse décrire correctement le comportement des structures à gradient fonctionnel vis-à-vis des sollicitations mécaniques.

En général, le comportement des FGMs sous des charges mécaniques peut être prédit à l'aide de théories de l'élasticité tridimensionnelle (3D) ou d'autres théories des plaques monocouches telles que les théories à une

seule couche équivalente (Equivalent Single Layer Theories (ESLT)). Les théories ESLT tiennent compte à la fois des effets de cisaillement et de déformation normale. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (Classical thin Plate Theory (CPT)) ne tient pas compte les effets du cisaillement et de déformation normale. Pour cette raison, il est simple mais ne convient qu'aux plaques minces. L'autre théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (First-order Shear Deformation Theory (FSDT)) est développée par Mindlin. FSDT considère la déformation de cisaillement par la variation linéaire du déplacement dans le plan à travers l'épaisseur. Cette théorie nécessite un facteur de correction de cisaillement. Pour éviter l'utilisation de ce facteur, les théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (Higher-order Shear Deformation Theories (HSDTs)) sont développées telles que la théorie TSDT de Reddy [6].

Le présent travail vise à étudier l'effet de la forme de la distribution de la porosité sur la réponse en vibration libre de la plaque FGM simplement supportée en utilisant la théorie TSDT. Les propriétés des plaques FGMs sont obtenues à partir de différentes lois régissant la variation du matériau à gradient fonctionnel. D'autre part, différents types de distribution de porosité sont utilisés pour ces plaques à gradient fonctionnel en vibration libre. L'effet de la porosité, l'indice de fraction volumique et les lois des différentes formes de porosité sont discutés en détail. La nouveauté de ce papier par rapport à la littérature [3-4] est l'étude des différents types de distribution de porosité en utilisant les différentes lois régissant la variation du matériau FGM.

### 2. Formulation du problème

Le champ des déplacements d'un point M de la plaque s'écrit sous la forme [4]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y) + z\theta_x \\ &\quad - cz^3 \left( \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \theta_x \right) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y) + z\theta_y \\ &\quad - cz^3 \left( \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \theta_y \right) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

En utilisant la théorie TSDT, le principe de Hamilton est utilisé pour trouver les équations du mouvement:

$$\delta H = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T - P) dt = 0 \quad (2)$$

où  $T$  est l'énergie cinétique,  $P$  est l'énergie potentielle totale,  $H$  est le Hamiltonien du système,  $dt$  est la variation de temps et  $t_0$  et  $t_1$  sont respectivement l'instant initiale et finale.

Pour la discrétisation spatiale basée sur la méthode des éléments finis, un élément quadratique avec quatre et huit nœuds est adopté en utilisant sept degrés de liberté ( $u, v, w, w_x, w_y, \theta_x, \theta_y$ ) par nœud. Les déplacements  $\{U\}$  sont reliés avec les déplacements nodaux  $\{r\}^e$  sur chaque élément via une matrice d'interpolation  $[N]$ . De même, le vecteur gradient de déplacements  $\{\theta\}$  s'expriment en fonction des déplacements nodaux  $\{r\}^e$  via une matrice des gradients d'interpolation  $[G]$ . Pour les fonctions de forme, nous adoptons des fonctions bilinéaires pour les déplacements axiaux ( $u, v$ ) et les rotations ( $\theta_x, \theta_y$ ) et les fonctions de haut degré Hermite pour le déplacement transversal  $w$ . Les équations de mouvement devient [4]:

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{ne} \int ([B_1(\theta)]^T [D_0] \{\varepsilon\} + [B_2]^T [D_1] \{\varepsilon\} \\ & - 3c [B_3]^T [D_2] \{\varepsilon\} - c [B_4]^T [D_3] \{\varepsilon\} \\ & + [B_1(\theta)]^T [D_1] \{\kappa\} + [B_2]^T [D_2] \{\kappa\} \\ & - 3c [B_3]^T [D_3] \{\kappa\} - c [B_4]^T [D_4] \{\kappa\} \\ & - 3c [B_1(\theta)]^T [D_2] \{\varphi\} - 3c [B_2]^T [D_3] \{\varphi\} \\ & + 9c^2 [B_3]^T [D_4] \{\varphi\} + 3c^2 [B_4]^T [D_5] \{\varphi\} \\ & - c [B_1(\theta)]^T [D_3] \{\psi\} - c [B_2]^T [D_4] \{\psi\} \\ & + 3c^2 [B_3]^T [D_5] \{\psi\} + c^2 [B_4]^T [D_6] \{\psi\}) dS \\ & + \sum_{e=1}^{ne} \int [N_2]^T [M] [N_2] \{\ddot{r}\}^e dS_e = \{0\} \end{aligned} \quad (3)$$

où  $ne$  est le nombre des éléments totale. Après l'assemblage, les fréquences propres sont trouvées en résolvant les résultats du problème aux valeurs propres:

$$[M] \{\ddot{r}\} + [K]_1 \{r\} = \{0\} \quad (4)$$

où  $[M]$  est la matrice masse et  $[K]_1$  est la partie linéaire de la matrice de rigidité.

### 3. Résultats numériques

Dans les applications numériques, on considère une plaque FGM poreuse composée de céramique et de métal comme montre la figure 1.

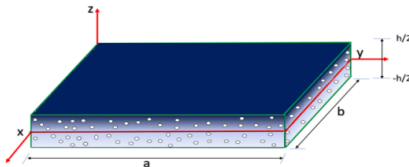


Figure 1: Plaque FGM rectangulaire poreuse avec la variation des propriétés dans le sens de l'épaisseur.

### 3.1 Etude de l'influence des lois des matériaux à gradient fonctionnel sur la distribution de la porosité

Dans cette partie, nous étudions l'effet de la distribution de la porosité sur les plaques FGM, à savoir: la distribution uniforme, la distribution centrée et la distribution de forme X (voir la figure 2).

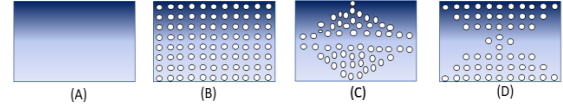


Figure 2: Distribution de la porosité dans les plaques FGM: (A) plaque FGM parfaite, (B) plaque FGM avec distribution uniforme, (C) plaque FGM avec distribution centrée et (D) plaque FGM avec distribution de forme X.

Soit une plaque FGM carrée de côté  $a = 0.2m$ ,  $b = 0.2m$  et d'épaisseur  $h = 0.025m$  simplement appuyée sur ses 4 côtés. La plaque est discrétisée en  $6 \times 6$  éléments. La plaque est en métal Ti-6Al-4V et en céramique ZrO2. Les lois régissant la variation du matériau FGM sont:

- P-FGM :

$$Y(z) = (Y_c - Y_m) \times V(z)_m + Y_m - \frac{\alpha}{2} (Y_c + Y_m) K \quad (5)$$

- S-FGM :

$$Y(z) = (Y_c - Y_m) \times V(z)_m + Y_m - \frac{\alpha}{2} (Y_c + Y_m) K \quad (6)$$

- E-FGM :

$$Y(z) = \left( Y_c \times \exp\left(B\left(z + \frac{h}{2}\right)\right) - \frac{\alpha}{2} (Y_c + Y_m) K \right) \quad (7)$$

avec  $B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{Y_c}{Y_m}\right)$  et  $Y = (E, \nu, \rho)$  où  $E, \nu$  et  $\rho$  représentent respectivement le module d'Young, le coefficient de poisson et la masse volumique. Les indices  $c$  et  $m$  définissent respectivement les propriétés matérielles de la céramique et du métal.  $K = 0, 1, \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right)$  et  $\left(\frac{2|z|}{h}\right)$  pour les distributions (A), (B), (C) et (D) respectivement (voir figure 2). L'expression de fraction volumique est donnée par une loi de sigmoïde sous la forme:

$$V(z) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} * \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}}\right)^N; & 0 \leq z \leq h/2 \\ \frac{1}{2} * \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}}\right)^N; & -h/2 \leq z \leq 0 \end{cases} \quad (8)$$

L'indice de fraction volumique pour la loi de puissance et la loi sigmoïde est  $N = 1$  et l'indice de fraction de porosité pour les trois lois est  $\alpha = 0.2$ . Le coefficient de Poisson est considéré comme constant et égal à la moyenne des deux coefficients du métal et de la céramique. La figure 3 montre que les fréquences propres sont proportionnelles aux modes propres pour les différentes lois P-FGM, S-FGM et E-FGM. Cette figure montre également que les fréquences propres dépendent

des lois régissant la variation du matériau à gradient fonctionnel et du type de distribution de porosité.

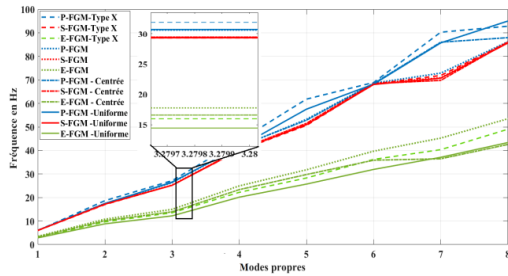


Figure 2: Influence des lois des matériaux FGM sur la distribution de porosité.

### 3.2 Etude de l'influence de la distribution de la porosité sur la loi P-FGM

Dans cette partie, nous étudions l'influence de la distribution de la porosité sur la loi P-FGM. D'autre part, on va chercher la valeur de fraction volumique  $N$  qui donne le même résultat que la loi exponentielle E-FGM. Considérons la même plaque de la figure 1 en considérant  $N = 1$  et les valeurs  $\alpha = 0, 0.1, 0.2, 0.3$  pour la fraction volumique de porosité. Nous utilisons la même discrétisation ( $6 \times 6$ ) et les mêmes conditions aux limites que celles dans la section 3.1. Ensuite, nous calculons les six premières fréquences propres pour les trois distributions de la porosité (voir la figure 3).

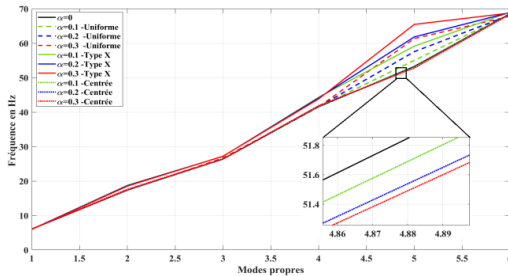


Figure 3: Influence de la porosité sur la loi P-FGM.

Le tableau 1 montre que lorsque l'exposant  $N$  augmente les fréquences diminuent et la loi P-FGM ne converge pas vers la loi E-FGM pour la plaque FGM sans porosité. Dans le cas des plaques poreuses P-FGM, les valeurs des fréquences convergent vers celles des plaques E-FGM dans les cas suivants ( $N = 13, \alpha = 0.5$ ) et ( $N = 130, \alpha = 0.4$ ).

Tableau 1: Fréquences propres de vibration libre des plaques poreuses P-FGM et E-FGM pour le mode (1.1).

P-FGM					E-FGM
$N = 1,$ $\alpha = 0.0$	$N = 3,$ $\alpha = 0.0$	$N_{max} = \infty,$ $\alpha = 0.0$	$N = 13,$ $\alpha = 0.5$	$N = 130,$ $\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.0$
7.0026	5.4	4.5357	3.48	3.48	3.475

## 4. Conclusion

Les vibrations libres des plaques FGM ont été étudiées dans ce papier en utilisant la théorie TSDT. Nous avons considéré que les propriétés matérielles sont obtenues à partir de différentes lois E-MGF, P-MGF et S-MGF. D'autre part, nous avons utilisé différents types de distribution de porosité pour ces plaques en vibrations libres. Nous concluons que les fréquences propres dépendent de la loi utilisée pour le matériau FGM (S-FGMP, P-FGMP ou E-FGMP) et du type de distribution de porosité. Les résultats ont également montré que la loi de puissance et la loi sigmoïde donnent presque les mêmes fréquences dans les différents types de distributions de porosité. Les résultats du présent papier pourraient contribuer à la production, la conception et l'analyse des plaques poreuses FGM pour diverses applications structurelles, électriques, mécaniques et biologiques. Ce travail est en cours d'élaboration pour prendre en compte de l'effet des petites échelles en utilisant la théorie d'élasticité non local [7].

## Références

- [1] Huang, X.-L., Shen, H.-S., *Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments*. International Journal of Solids and Structures (2004), 41(9-10), 24032427.
- [2] Wu, H., Yang, J., Kitipornchai, S., *Mechanical Analysis of Functionally Graded Porous Structures: A Review*. International Journal of Structural Stability and Dynamics (2020), 20(13), 2041015.
- [3] Janane Allah, M., Belaasilia, Y., Timesli, A., El Haouzi, A., *TSDT theory for free vibration of functionally graded plates with various material properties*. Mathematical Modeling and Computing (2021), 8(4), 691704.
- [4] Janane Allah, M., Timesli, A., Belaasilia, Y., *Nonlinear dynamic analysis of porous functionally graded materials based on new third-order shear deformation theory*. Steel and Composite Structures (2022), 43(1), 1-17.
- [5] Timesli, A., *Analytical modeling of buckling behavior of porous FGM cylindrical shell embedded within an elastic foundation*. Gazi University Journal of Science and Technology (2021), 35(1), 148-165.
- [6] Reddy, J.N., *Analysis of functionally graded plates*. International Journal for Numerical Methods in Engineering (2000), 47, 663-684.
- [7] Timesli, A., *Buckling Behavior of SWCNTs and MWCNTs Resting on Elastic Foundations Using an Optimization Technique*. Physical Mesomechanics (2022), 25, 129-141.



# Optimal and Robust Controls comparison of thermo-piezoelectric composite plate with Reduced Order FE Modelling and Monte Carlo Simulation

L. EL KHALDI<sup>1</sup>, M. SANBI<sup>1</sup>, R. SAADANI<sup>2</sup> and M. RAHMOUNE<sup>2</sup>

1. Team Sciences et Technologies Avancées, National School of Applied Sciences, Abdelmalek Essaadi University

2. Laboratory for the Study of Advanced Materials and Applications, FSM-ESTM, Moulay Ismail University

loukmane.elkhalidi@gmail.com ; m.sanbi@uae.ac.ma ; rachidsaadani@gmail.com ; rahmoune@umi.ac.ma

## Abstract

This contribution presents a comparison of two types of active controls, LQR and LQG-Kalman algorithms. The control was applied to a thin thermopiezocomposite plate modeled with classic finite elements and according to a reduced-order process. Reducing the full order state model resulting from FE modeling to a lower sub-model saves simulation time and reduces computational costs. The method MCS was used here to improve the number and locations selection of piezoelectric sensors on the chosen plate model. A numerical simulation was accomplished to investigate the effectiveness of the robust control LQG-Kalman technic under mechanical and thermal disturbances compared with the LQR procedure.

**Keywords :** *Smart structure, LQR, LQG, Kalman, Reduced Finite Element, Active control, Monte Carlo*

## 1 Introduction

In this manuscript, a reduced-order FE model is used for the dynamic control of thermopiezoelectric plate [2]. By applying Hamilton's principle to obtain the equations of motion, this process is used to analyze the eigenvalues of the full order system matrices to reduce the dimensionality of the full model [1, 3]. Precisely, it is used to reduce the computational cost and the complexity of computations in modeling and control of structures without changes in their accuracy. Regarding the control engineering field, the application of the reduced-order models are very convenient to design controllers; in general, the order of controller increases with the order of the system, and a considerably high order of controller is complicated to design because a large number of poles or/and zeros can cause the instability of the system. Sometimes, controllers with high/middle order cannot be built physically and systems with a relatively small order, also need MOR because modern control methods such as LQR or LQG generate a controller which has the same order as the system. Therefore, reducing the order of the system is very useful to design a feasible and robust control and reduce the required computational effort.

## 2 Mathematical Modeling

### 2.1 Constitutive and dynamic equations

The linear constitutive relations for thermopiezoelectric material are employed (Taylor et al.):

$$\begin{aligned}\sigma &= C^E \cdot \varepsilon - e \cdot E - \lambda \cdot T, \\ D &= e^\sigma \cdot \varepsilon - \epsilon \cdot E + p \cdot T, \\ s &= \lambda^\sigma \cdot \varepsilon + p^T \cdot E + \tilde{\alpha} \cdot T,\end{aligned}\quad (1)$$

where  $\sigma$  is the stress tensor,  $D$  the electric displacement vector,  $T$  the temperature,  $s$  the entropy,  $\varepsilon$  the strain tensor,  $E$  is the electric field,  $C^E$  is the elastic constants,  $e$  denotes the piezoelectric coefficients,  $\epsilon$  the dielectric tensor,  $\lambda$  the thermo-elastic tensor,  $p$  the pyroelectric tensor,  $\tilde{\alpha}$  the is the entropy-temperature coefficient with  $\tilde{\alpha} = \rho_p c_0 / T_0$  where  $c_0$  and  $T_0$  are the is the specific heat per unit mass at constant volume and initial temperature, respectively. A cantilevered square plate ( $100\text{mm} \times 100\text{mm} \times 50\text{mm}$ ) instrumented with PZT-5H piezoelectric actuators and sensors is considered. The plate is divided into 50 quadrilateral finite elements of equal size. Each plate element is modeled using 4-noded Kirchhoff's plate element with each node having one translation and two rotational dofs. The finite element model of the plate is derived using Hamilton's principle. The compact dynamic equation can be written as

$$\begin{aligned}M_{xx} \ddot{X} + K_{xx} X + K_{q\phi} \phi - K_{xT} T - \bar{F} &= 0 \\ K_{x\phi} X + K_{\phi\phi} \phi - K_{\phi T} T - Q_a &= 0\end{aligned}\quad (2)$$

where  $K_{u\phi}$  and  $K_{\phi\phi}$  are the global matrices of stiffness due to electromechanical coupling and due to electrical dofs. Vectors  $\phi$  and  $Q_a$  correspond to an actuator electrical dof and to an electrical charge.

### 2.2 Reduced order model

Reduced order process is a global reduction algorithm which is based on the eigenvalue analysis of FE model. There are two reduction process levels; reduction in number of modes and the reduction in dofs. The transformation matrix obtained using this algorithm transform the full model to a lower sub-model using selected some

modes with fewer arbitrary dofs. Using this modal matrix, system can be written in terms of modal coordinates ( $q(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ) as

$$X(t) = \psi_{n \times n} q_{n \times 1}(t) \quad (3)$$

Retaining only a eigen-modes and by dividing the full order system into master and slave dofs, we get in terms of active dofs

$$X(t) = \begin{Bmatrix} X^m(t) \\ X^s(t) \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} \psi^m(t) \\ \psi^s(t) \end{Bmatrix} \cdot q_a(t) \quad (4)$$

where  $q_a$  is the modal matrix having  $a$  modes, the superscript  $m$  and  $s$  correspond to master and slave respectively. Also here,  $\psi^m \in \mathbb{R}^{m \times a}$  and  $\psi^s \in \mathbb{R}^{(n-m) \times a}$ . Considering only the master dofs, the modal response is

$$q_a(t) = \psi_p^m X^m(t) \quad (5)$$

where,  $\psi_p^m$  is the generalized inverse of  $\psi^m$ . After Substitution, we get

$$X(t) = \psi \psi_p^m X^m(t) = T_r X^m \quad (6)$$

Here,  $\psi \psi_p^m$  is the transformation matrix ( $T_r$ ) which maps the full system into reduced subspace. Using this transformation matrix, the full order system matrices in reduced dimension can be given as

$$M_r = T_r^T M T_r ; K_r = T_r^T K T_r ; C_r = T_r^T C T_r \quad (7)$$

where,  $M_r, K_r, C_r$  and  $T_r^T F(t)$  represent the reduced mass, stiffness, damping matrices and force vector. The selection of modes and dofs are governed by the type of system as well as the external loading conditions.

### 2.3 Monte Carlo simulation description

The Monte Carlo simulation was exploited here to find a random sensors number selection as well as The discrete element locations of these sensors, and the interfacial location of the sensor pattern. This is accomplished by minimizing the variance based on randomly chosen points representing the sensor locations. The random grid points are chosen from the grid map and spatial analysis is performed based on those location values. The mean-variance results are calculated and stored as the optimization variable and steps are repeated  $n_{mc}$  times until the minimum mean-variance is found. The sensor locations that generated the minimum mean-variance are therefore the most optimal sensor placement based on the  $n_c$  repetitions.

## 3 Active control Equations

### 3.1 Reduced control model

The dynamic equations for a beam with PZT in reduced representation can be expressed as

$$M_r \ddot{X}^m(t) + C_r \dot{X}^m(t) + K_r X^m(t) = F_r(t) \quad (8)$$

For MIMO systems, the above equation can be written in state space form as

$$\dot{X}^m = A^m X^m + B^m u^m \quad (9)$$

$$A^m = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_r^{-1} K_r & -M_r^{-1} C_r \end{bmatrix}, B^m = \begin{bmatrix} 0 \\ M_r^{-1} F_r \end{bmatrix}$$

and  $X^m$  is  $(m \times 1)$  state vector.

### 3.2 Sensors outputs and actuators inputs

The external charge applied on piezoelectric layer  $Q_{ext}^e$ , the charge developed on piezoelectric patch due to pyroelectric effect  $Q_{pyr}^e$  and the capacitance of sensor patch at ambient temperature  $Z_s$  are

$$Q_{ext}^e = \int_{A_p} q dA_p ; Q_{pyr}^e = \frac{1}{2} \int_P \{P\}^T \{B_\phi\} \Delta T d\tau$$

$$Z_{sensor} = \check{K}_{\phi\phi}^e = ([K_{\phi\phi}^e] + [\check{K}_{\phi\phi}^e]) \quad (10)$$

where  $[K_{\phi\phi}^e]$  is the capacitance of piezoelectric patch at reference temperature and  $[\check{K}_{\phi\phi}^e]$  is change in the capacitance of piezoelectric patch at a given temperature. The Voltage generated across the piezoelectric patch is

$$V = \left( [K_{\phi\phi}^e] + [\check{K}_{\phi\phi}^e] \right)^{-1} \left[ Q_{ext}^e + Q_{pyr}^e + [\check{K}_{\phi\phi}^e] \{u_e\} \right] \quad (11)$$

and the modal force can be written as

$$\{f\} = [U]^T \left\{ F_{pth} - [\check{K}_{u\phi}^e] [\check{K}_{\phi\phi}^e]^{-1} (Q_{ext}^e + Q_{pyr}^e) \right\} \quad (12)$$

with  $[\check{K}_{u\phi}^e] = [K_{u\phi}^e] + [\check{K}_{u\phi}^e]$ .  $Q_{ext}^e = Z_{act} V_{ext}$  is the total external charge applied on piezoelectric actuator surface where  $Z_{act} = \left( \epsilon_{33}^T + \tilde{\epsilon}_{33} \Delta T \right) A/d$  is the capacitance of piezoelectric actuator and ' $V_{ext}$ ' is the external applied voltage. Hence, the modal control force can be deduced

$$F_c = -[U]^T [\check{K}_{u\phi}^e] [\check{K}_{\phi\phi}^e]^{-1} Z_{act} V_{ext} \quad (13)$$

By converting uncoupled equations into a state-space model, the general modal equation can be written as

$$\{\dot{s}\} = [A]\{s\} + [B]V_{ext} + [G] \quad (14)$$

The Voltage output equation generated across piezoelectric sensor due to developed strains is

$$V_{sens} = [\check{K}_{\phi\phi}^e]^{-1} (Q_{pyr} + [\check{K}_{u\phi}^e] u_e) \quad (15)$$

The first modal control force, the control voltage and the voltage in sensor are given by

$$F_{c1} = -[U]^T [\check{K}_{u\phi}^e] \{V_{ext}\} \quad (16)$$

$$V_{ext} = \left( [U]^T [\check{K}_{u\phi}^e] \right)^{-1} k \dot{\eta}_1 \quad (17)$$

$$V_{sens} = [\check{K}_{\phi\phi}^e]^{-1} \left[ Q_{pyr} + [\check{K}_{u\phi}^e] \{u_e\} \right] \quad (18)$$

where  $\dot{\eta}_1$  is estimated using the Kalman observer. The modal displacements and velocities are estimated by

$$\begin{aligned} \{\dot{\eta}_e\} &= [A_d] \{\eta_e\} + [B_d] V_{ext} + [L] (V_{sens} - [X] \{\eta_e\}) \\ \{\eta_e\} &= \{\dot{\eta}_e\} + [M] (V_{sens} - [X] \{\eta_e\}) \end{aligned} \quad (19)$$

where  $\eta_e$  is the estimated full state vector and  $[A_d]$ ,  $[B_d]$  are discretized forms of matrices  $[A]$  and  $[B]$  of the state equation.  $[L]$  and  $[M]$  are Kalman observer gain matrices. The strain developed by the electric field  $E$  on the actuator layer is given by

$$\varepsilon_A = d_{31} E = d_{31} V^a(t) / t_a \quad (20)$$

When the input to the actuator  $V^a(t)$  is applied in the thickness direction. The control force applied by the actuator and total force are given by

$$f_{ctrl} = E d_{31} \bar{z} V^a(t) \quad ; \quad f_{tot} = f_{ctrl} + f_{ext} \quad (21)$$

#### 4 Discussion

A comparison between LQR and LQG-Kalman controls is presented. The comparison was applied to a plate discretized by reduced finite element modeling and using MC simulation. Figures 1 and 2 illustrate the impulse responses comparison. The first with the same selection of active dofs and the second for two types of controls and two active dofs selections. Figure 3 shows, for two different temperatures values, the controlled LQG-Kalman responses in reduced mode.

#### 5 Conclusions

It is observed that the LQG-Kalman control gives good results than LQR especially for medium/low voltages and for a large number of active dof selections using MC distribution. Simulations, relative to the reduced FE modeling, show, also the feasibility and the effectiveness of the

LQG-Kalman control to the variations of temperature.

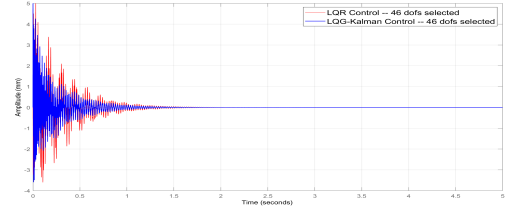


Figure 1: Impulsion responses of the closed loops of LQR and LQG-Kalman controls. Comparison applied to the 46 active dofs selection of the reduced model with MC distribution (100 iterations).

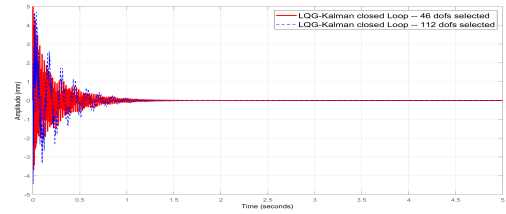


Figure 2: Impulsion responses of the closed loops of LQR and LQG-Kalman controls. Application to the reduced model with 46-112 active dofs selections with MC distribution (100 iterations).

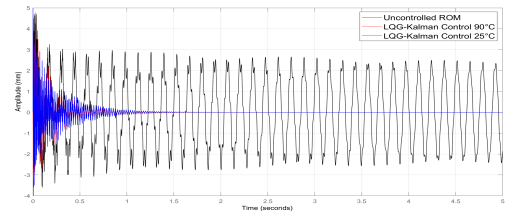


Figure 3: LQG-Kalman control of a reduced model with 112 dofs for temperature  $25^\circ C$  and  $90^\circ C$  with MC distribution (100 iterations).

#### References

- [1] Lal H.P., S. Sarkar, and S. Gupta., *Stochastic model order reduction in randomly parametered linear dynamical systems*, Applied Mathematical Modelling, 2017, 333(4):1119–31.
- [2] Sanbi M., Saadani R., Sbai K. and Rahmoune M., *Thermal Effects on Vibration and Control of Piezocomposite Kirchhoff Plate Modeled by Finite Elements Method*, Smart Materials Research (2015) Article ID 748459.
- [3] Willcox K. and Peraire J., *Balanced model reduction via the proper orthogonal decomposition*. AIAA journal, 40(11):2323–2330, 2002.

## **Thème 02 :**

# **Modélisation en mécanique des solides et des structures**

## Evaluation of Dynamic Stress Intensity Factors using Taylor-SPH method

H. Karim Serroukh, O. Bouaraquia, M. Mabssout\*

Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, FST - Tanger

\*E-mail : m.mabssout@fstt.ac.ma

### Abstract

In this paper, Dynamic Stress Intensity Factors (DSIFs) of a cracked body are evaluated using the Taylor-SPH meshfree method. The visibility criterion is adopted to model discontinuities. The DSIFs are calculated from the stress field in the vicinity of the crack tip. To verify the accuracy of the proposed method, a semi-infinite lateral crack in an infinite elastic plate subjected to the ramp loading is analyzed. It is found that the numerical results are in good agreement with the analytical solution implying the efficient and accurate of the Taylor-SPH to evaluate the DSIFs.

**Keywords:** Taylor-SPH; Meshfree; Dynamic fracture; Dynamic stress intensity factors

### 1. Introduction

The Dynamic Stress Intensity factors are one of the most important parameters in the analysis of dynamic fracture mechanics since it characterizes the stress field near the crack tip and controls if crack starts to propagate in material. Therefore, an accurate evaluation of DSIFs is a crucial task in understanding and predicting dynamic fracture behavior of a cracked body. Various numerical methods have been developed to evaluate the DSIFS for static and dynamic problems. Among them, we find the finite difference method [1], the finite element method [2], the boundary element method [3]. However, these mesh-based methods have encountered difficulties related to the mesh such as distortion and re-meshing. To avoid these difficulties, a large number of meshless methods have been proposed in the past [4,5]. Taylor-SPH is a meshless method developed by Mabssout et al. [6,7] to solve partial differential equations for small and large deformations. It has been applied with great success to solve linear and nonlinear dynamic problems in solid mechanics [8,9,10]. In this paper, we will extend the application of the Taylor-SPH to fracture mechanics problems. To model discontinuities, the visibility criterion is adopted [5]. An infinite plate with a semi-infinite lateral crack is analyzed using the Taylor-SPH method. The crack is assumed to be stationary. The DSIFs are obtained from the stress fields in the vicinity of the crack tip. In order to

validate the accuracy of the proposed method, numerical results are compared with analytical solution.

### 2. Governing equations

Consider a 2D elastic solid which occupies a domain  $\Omega$  bounded by a boundary  $\Gamma = \Gamma_v \cup \Gamma_\sigma$  and containing a crack  $\Gamma_c$ . The governing equations for a 2D linear elastodynamic problem are given by:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad \text{in } \Omega \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} = \mathbf{D} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{in } \Omega \quad (1b)$$

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \quad \text{on } \Gamma_v$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad \text{on } \Gamma_\sigma$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_c$$

Where  $\mathbf{v}$  is the velocity vector,  $\boldsymbol{\sigma}$  is the Cauchy stress tensor,  $\nabla$  is the divergence operator,  $\rho$  is the density,  $\mathbf{b}$  is the vector of body forces per mass unit,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  is the rate of strain and  $\mathbf{D}$  is the elastic tensor.  $\bar{\mathbf{v}}$  and  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  are prescribed velocity and stress respectively;  $\mathbf{n}$  is the outward normal to the domain.

For 2D plane stress problem and neglecting the body forces, the equations (1a,b) can be written in a compact form as :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (2)$$

where

$$\mathbf{U} = (\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12} \quad v_1 \quad v_2)^T$$

$$\mathbf{F}_x = -(D_{11}v_1 \quad D_{12}v_1 \quad D_{33}v_2 \quad \sigma_{11}/\rho \quad \sigma_{12}/\rho)^T$$

$$\mathbf{F}_y = -(D_{12}v_2 \quad D_{22}v_2 \quad D_{33}v_1 \quad \sigma_{12}/\rho \quad \sigma_{22}/\rho)^T$$

where  $D_{ij}$  are the components of the plane stress elastic matrix  $\mathbf{D}^e$ .

### 3. Numerical discretization: Taylor-SPH

The Taylor-SPH meshfree method [6,7] is used to discretize equations (2).

- *Time discretization*

Using Taylor expansion in time, time discretization of equation (2) is:

- At time  $t^{n+1/2}$ :

$$\mathbf{U}^{n+1/2} = \mathbf{U}^n - \frac{\Delta t}{2} \nabla \cdot \mathbf{F}^n \quad (3)$$

- At time  $t^{n+1}$ :

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n - \Delta t \nabla \cdot \mathbf{F}^{n+1/2} \quad (4)$$

- *Spatial discretization*

Taylor-SPH spatial discretization is based on the use of two sets of particles: Real and virtual particles [6,7]. Applying the corrected SPH method, the spatial discretization of the semi-discretized equations (3) and (4) is:

- At time  $t^{n+1/2}$ :

$$\mathbf{U}_I^{n+1/2} = \mathbf{U}_I^n - \frac{\Delta t}{2} \sum_{J=1}^{N_R} \frac{m_J}{\rho_J} (\mathbf{F}_I^n - \mathbf{F}_J^n) \tilde{\nabla} W_{IJ} \quad (5)$$

- At time  $t^{n+1}$ :

$$\mathbf{U}_I^{n+1} = \mathbf{U}_I^n - \Delta t \sum_{J=1}^{N_V} \frac{m_J}{\rho_J} (\mathbf{F}_I^{n+1/2} - \mathbf{F}_J^{n+1/2}) \tilde{\nabla} W_{IJ} \quad (6)$$

$N_R$  and  $N_V$  are the numbers of real and virtual particles respectively such that  $\|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_J\| \leq 2h$ .

$\tilde{W}_{IJ}$  and  $\tilde{\nabla} W_{IJ}$  are the corrected kernel and gradient kernel respectively. The parameter  $h$  defines the size of the kernel support.

- *Visibility criterion:* To model the discontinuities in Taylor-SPH meshless method, the visibility criterion [5] is adopted in this work. For a given particle I, the particle J inside the support domain that is located on the opposite side of the crack is excluded from the influence domain of the particle I.

#### 4. Numerical example: Stationary Mode-I semi-infinite crack

The Dynamic stress intensity factors for an infinite plate with a semi-infinite lateral crack is investigated using the Taylor-SPH method. Since this problem has an analytical solution [11], it will be used to analyze the efficiency of the Taylor-SPH method to estimate the DSIFs.

The plate dimensions are taken as: Length  $L = 10 \text{ m}$ , height  $2H = 4 \text{ m}$  and crack length  $a = 5 \text{ m}$ . The material properties are: Young's modulus  $E = 210 \text{ GPa}$ ; Poisson's ratio  $\nu = 0.3$  and density  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$ .

The ramp loading applied traction to the boundary:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_0 \frac{t}{t_d} & t \leq t_d \\ \sigma_0 & t \geq t_d \end{cases} \quad (7)$$

where  $t_d$  is the rise time of the ramp load.

The exact time-dependent mode-I DSIF is given by [11]:

$$K_I(\bar{t}) = \begin{cases} \frac{4}{3\pi} \frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu} \sigma_0 \sqrt{\pi C_d t_d} \left(\frac{\bar{t}}{t_d}\right)^{\frac{3}{2}} & 0 \leq \bar{t} \leq t_d \\ \frac{4}{3\pi} \frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu} \sigma_0 \sqrt{\pi C_d t_d} \left[ \left(\frac{\bar{t}}{t_d}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{\bar{t}}{t_d} - 1\right)^{\frac{3}{2}} \right] & \bar{t} \geq t_d \end{cases} \quad (8)$$

Where

$\bar{t} = t - t_c$ ;  $t_c = \frac{H}{C_d}$  the time needed by the stress wave to reach the crack tip,  $C_d$  is the longitudinal wave velocity.

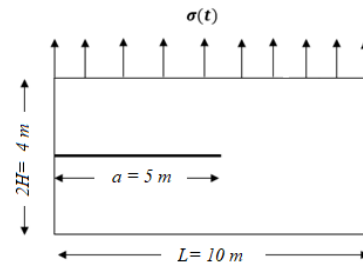


Fig.1 Geometry of an edge-cracked plate

The DSIFs are evaluated from the vertical stress field in the vicinity of the crack tip:

$$K_I(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy}(r, 0) \quad (9)$$

where  $r$  is measured from the crack tip.

The normalized mode-I DSIFs is given by:

$$\tilde{K}_I(t) = \frac{K_I(t)}{\sigma_0 \sqrt{H}} = \sqrt{\frac{2\pi r}{H} \frac{\sigma_{yy}(r, 0)}{\sigma_0}} \quad \text{as } r \rightarrow 0 \quad (10)$$

Fig. 2 presents the normalized DSIFs as a function of a normalized time  $\frac{t}{t_c}$ . As it can be observed, an excellent agreement between the results obtained by the Taylor-SPH and the analytical solution.

Fig. 3 shows the vertical stress distribution at time  $t/t_c=3$ . As expected, the stress is concentrated at the crack tip vicinity.

The same problem is analyzed with load intensities  $\sigma_0 = 250 \text{ MPa}$  and  $500 \text{ MPa}$ . The results are shown in Fig. 4. As expected, as the intensity of the applied loading increases, the value of the DSIFs also increases after  $\frac{t}{t_c} = 1$ .

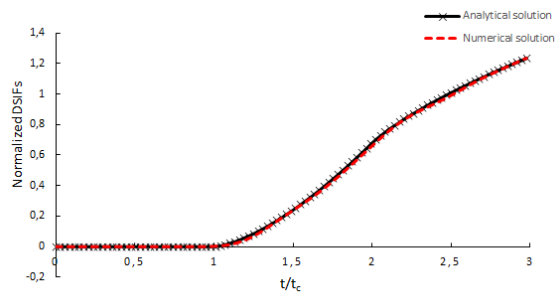


Fig. 2 Normalized DSIFs: Comparison between numerical results and analytical solution

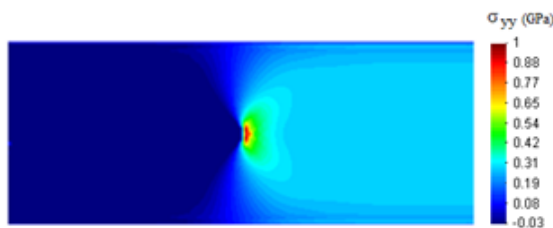


Fig. 3 Stress distribution  $\sigma_{yy}$  at time  $t/t_c=3$

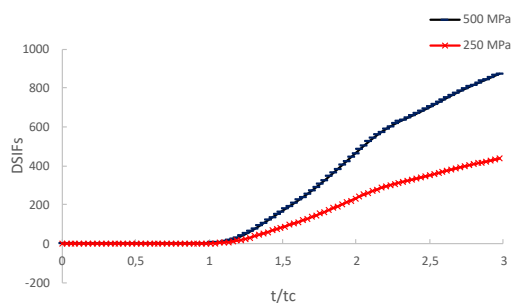


Fig. 4 Numerical DSIFs using the Taylor-SPH method for two different load intensities

## 5. Conclusion

In this paper, the Taylor-SPH meshfree method has been extended to dynamic fracture mechanics. It was applied to an infinite plate with a semi-infinite crack subjected to the ramp loading. The DSIFs are calculated using the stress field near the crack tip. The obtained results show that Taylor-SPH is an excellent numerical tool to evaluate accurately the DSIFs, parameters of great importance in understanding and predicting dynamic fracture behavior of a cracked material.

## References

- [1] Y. M. Chen, *Numerical computation of dynamic stress intensity factors by a Lagrangian finite-difference method (the HEMP code)*, Eng. Fract. Mech., vol. 7, 1975; pp. 653–660.
- [2] K. Kishimoto, S. Aoki and M. Sakata, *Dynamic stress intensity factors using J-integral and finite element method*, Eng. Fract. Mech., 13 (2), pp. 387–394, 1980.
- [3] M.H. Aliabadi, *Boundary element formulations in fracture mechanics*. Appl Mech. Rev 1997;50(2):83–96.
- [4] R.A. Gingold, J.J. Monaghan, *Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical star*, Monthly Notices R. Astron. Soc. 181 (1977) 375–389.
- [5] T. Belytschko, Y.Y. Lu, L. Gu, *Crack propagation by element-free Galerkin methods*, Eng. Fract. Mech.(1995) 295–315.
- [6] M. Mabssout, M.I.Herrerros, *Runge-Kutta vs Taylor SPH. Two-time integration schemes for SPH with application to soil dynamics*, Applied Mathematics Modelling; vol. 37, 2013; pp. 3541-3563.
- [7] M.I.Herrerros, M. Mabssout, *A two-steps time discretization scheme using the SPH method for shock wave propagation*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 200, 2011; pp. 1833–1845.
- [8] M. Mabssout, M. I. Herrerros, and H. Idder, *Predicting dynamic fracture in viscoplastic materials using Taylor-SPH*. Int. J. Impact Engng., vol. 87, 2016; pp. 95–107.
- [9] H. Karim Serroukh., M. Mabssout, M.I. Herrerros, *Updated Lagrangian Taylor-SPH method for large deformation in dynamic problems*, Applied Mathematical Modelling, vol. 80, 2019; pp. 238-256.
- [10] H. Karim Serroukh, *Développement d'une méthode sans maillage pour les problèmes dynamiques en grandes déformations: Updated Lagrangian Taylor-SPH*, Thèse, Faculté des Sciences et Techniques de Tanger, 2020.
- [11] L.B. Freund. *Dynamic Fracture Mechanics*. Cambridge University Press, 1990.

## The effect of brace inclination on the stress concentration factor distribution in welded tubular Y-joints subjected to deflected bending load.

E. CHOUHA<sup>1</sup>, Z. EL MASKAOUT<sup>1</sup>, A. CHOUAF<sup>1</sup>, S.E. JALAL<sup>1</sup>

1. Laboratory of Mechanics, Engineering and Innovation LM2I, ENSEM, Hassan II University of Casablanca  
h.chouha@ensem.ac.ma, a.chouaf@ensem.ac.ma, z.elmaskaoui@ensem.ac.ma, se.jalal@ensem.ac.ma

### Abstract

Metal constructions in tubular profiles find their applications in several industrial sectors such as metal bridges, oil platforms, pipelines, etc. This structure can be damaged by concentrated stresses in the weld toe vicinity. Semi-parametric formulas, currently available in the literature, can inform us about the value of the stress concentration factor SCF, but not his distribution. In this study, a Finite Elements modeling was carried out for three tubular welded Y-joint, in order to find the effect of inclination brace ( $\theta=45^\circ$ ,  $\theta=60^\circ$  and  $\theta=90^\circ$ ) on the SCF distribution under a series of deflected bending load.

**Keywords:** *Tubular Joint, Finite Elements Methods, Stress Concentrated Factor, Hot Spot, Linear extrapolation method, Y-joint.*

### 1. Introduction

Metal structures consist, in general, of several elements assembled by welding process, to form welded joints called joint. These joints have several forms T, DT, Y, DY, K and KT, etc. which represent geometrical discontinuities where stress concentration zones are localized.

Under external forces, these joints have stress concentrations in the vicinity of the weld toe [1,2], this concentration is localized in a point called hot spot. This work will focus on the effect of inclination brace on the stress concentration factor (SCF) distribution in welded tubular Y-joints, under several cases of deflected bending loads.

### 2. Dimensions and mechanical properties

The steel (S235) is the material of these three joints studied, with the Young modulus  $E= 210$  GPa and the Poisson ratio  $\nu=0.3$ .

The dimensions and some details of the Y-joint studied, are presented in Fig.1

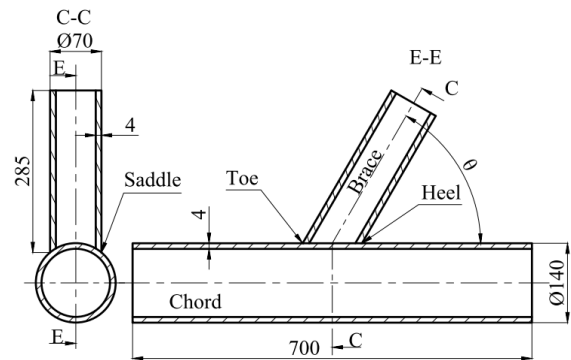


Fig. 1. Main Dimensions of Y-joint [mm]

### 3. Finite element analysis

In this study, the 3D models were created by Catia V5 and then their behaviors were simulated by the software Patran-Nastran.

#### 3.1. Numerical model

For our numerical simulations, we used the finite element method which still remains a preferred tool for dealing with complex problems.

The accuracy of the numerical results depends on several factors, namely; the type of elements used, the mesh refinement, in particular in the vicinity of the hot spots and the integration scheme used.

Regarding the choice of finite elements to use, several authors; Chan et al. [3, 4], Morgan and Lee [5] and Ghanameh et al. [6] have adopted a 2D mesh based on quadrilateral elements, type thin shells, with 4 or 8 nodes. However, this gave results consistent with the experimentation.

Also, the mesh can be carried out using solid elements such hexahedral with 8 or 20 nodes.

This second choice is preferred by Karamanos et al. [7] and Chiew et al. [8]. According to these researchers, the use of shell elements is inaccurate and linear extrapolation (Fig. 4) recommended by IIW [9] cannot be applied in order to find the local stress.

For our study, the mesh used for studied joints is carried out using solid hexahedral elements with eight nodes according to the ARSEM recommendations [10].

In order to apply the extrapolation method, a mesh refinement (Fig. 2) is performed in the weld toe vicinity.



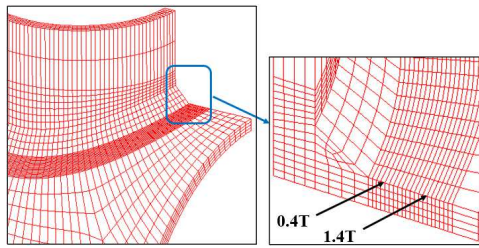


Fig. 2. Mesh refinement and linear extrapolation point

**3.2. Numerical model validation**

In order to validate the numerical model, the effect of dimensionless parameters ( $\tau=t/T$ ,  $\beta=d/D$  and  $\nu=D/2T$ ) on the SCF values were carried out.

Then, the result was compared with that calculated by the parametric equations of Efthymiou [11] and Lloyd [12] (Fig.3).

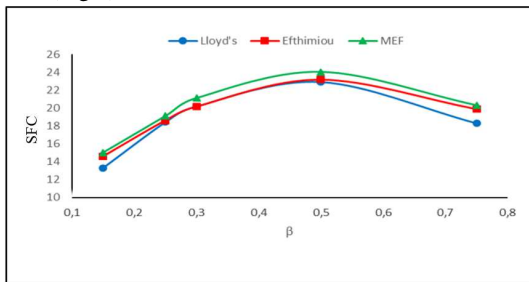


Fig.3: Effect of the  $\beta$  on the SCF values

Through this figure, we can say that our result is almost in agreement with that of the two authors.

**4. Results and discussion**

To avoid the geometrical singularities problem, for each load orientation and for each joint, the local stress assessment around the weld toe is based on the linear extrapolation method (Fig.4).

The goal of this method consists to take the stress on the contours spaced at  $0.4T$  and  $1.4T$  from that of the chord toe. This method will be applied at each node of the weld toe.

Thus, local stresses are calculated as follows  $\sigma_{Local} = 1.4\sigma_1 - 0.4\sigma_2$  (Fig. 4).

The applying of this method must be taken into account when meshing the joint (Fig. 2). If not, the results will not be reliable.

After fixed the both ends of the chord and applied a force ( $F=1647N$ ) to the free end of the brace, the figure 5 shows the state of the extrapolated local stresses.

This force was applied in nineteen angular directions  $\psi$ , from  $0^\circ$  to  $180^\circ$  with a step of  $10^\circ$  counted from Heel point (Fig. 6).

The nineteen curves were presented in the same graph (Fig.5).

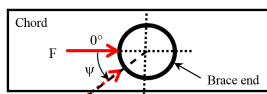


Fig.6: Applied force on Y-joints studied.

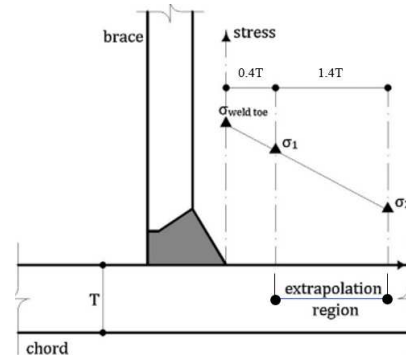


Fig. 4. Linear Extrapolation Method [8].

When the angle  $\psi = 0^\circ$ , we have in plane bending case, because the deformed shape remains always in the plane formed by the axes of the joint. On the other hand, when  $\psi = 90^\circ$ , we talk about the out of-plane-bending. When  $\psi \in ]0^\circ,90^\circ[ \cup ]90^\circ,180^\circ[$ , we talk about deflected bending.

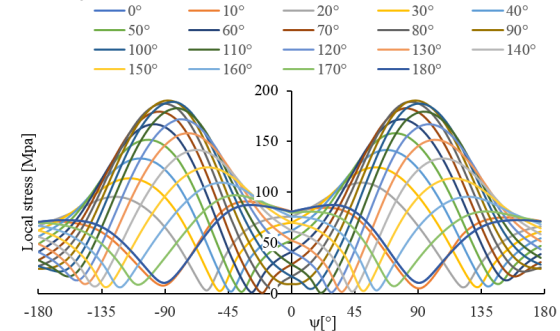


Fig. 5. Extrapolated stress distribution along the weld toe

This figure presents the results of the sixteen deviated bending case. We note that the hot spot moves towards the Saddle point when stepping from in plane bending to out-of-plane bending, that can be visualized clearly in figure 7, in which we can see that the extrapolated local stress is minimal in the plane bending case ( $\psi = 0^\circ$  or  $180^\circ$ ), and maximum in the out-of-plane-bending case ( $\psi = 90^\circ$  or  $270^\circ$ ).

The results of the Y-joint with ( $\theta = 90^\circ$ ) are in agreement with those found by Pang and Lee [13].

In figure 7, the maximum local stress of the three joints studied, has been represented according to the orientation of the loading.

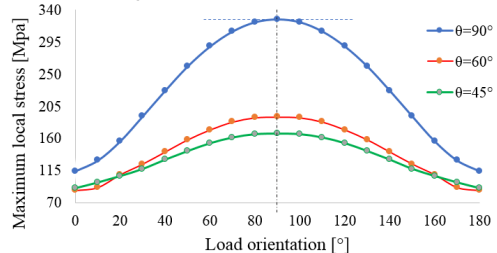


Fig.7. Maximum local stress distribution vs load orientation.

From figure 7, whatever the angular orientation load, we can observe that the maximum stress, in the case of the small inclination angle joint, remains lower than those of the others.

In the deflected loading case, the maximum stress is equal to 327 MPa (Y90°). For this configuration, the maximum stress exceeds far the yielding stress, which locally generates a plastic deformation. While the Y45° joint has a maximum stress of 166 MPa that's a ratio of 1.97.

This stress concentration is located exactly at the Saddle points ( $\psi = 90^\circ$  and  $\psi = 270^\circ$ ).

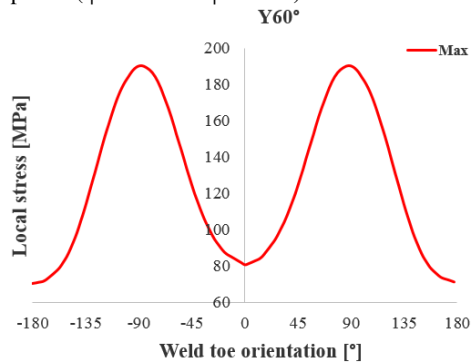


Fig.8 : Safe loading limits.

## 5. Conclusions

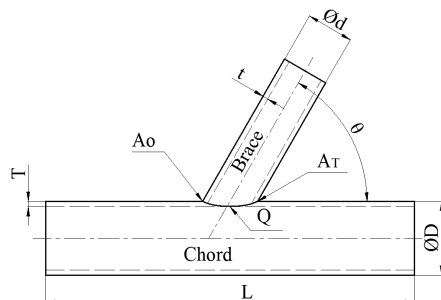
In this study, the response of the Y45°, Y60° and Y90°-joint to deflected loads was treated. The obtained results allowed us to conclude that:

- The Y45°-joint resists 1.97 times better than the Y90° one;
- The Y45°-joint resists 1,14 times better than the Y60° one;
- For the three joints, the maximum local stress is always located at Saddle point ( $\psi = 90^\circ$ ), on the other hand, the Toe and Heel points are always safe;
- Among all the cases studied loads, the most dangerous one is out-of-plane bending ( $\psi = 90^\circ$ ).

In service, these joints are subjected to a combined loading between in-plane and out-of-plane bending.

This combined loads, as part of this work, will simulate all the probabilities of the stresses and will make it possible to establish a maximum safety limit (red line of maximum local stresses) Fig. 8

## Notations



- $\theta$  : Brace inclination angle
- $\tau=t/T$  : Ratio of brace thickness to Chord thickness
- $\beta=d/D$  : Diameter ratio
- SCF : Stress Concentration Factor

## References

- [1] G. Liu, X. Zhao, and Y. Huang, "Prediction of stress distribution along the intersection of tubular T-joints by a novel structural stress approach," *Int. J. Fatigue*, vol. 80, Nov. 2015, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2015.05.021.
- [2] E. Chouha, S. E. Jalal, Z. El Maskaoui, and A. Chouaf, "Concentrated stress location areas for welded tubular T-joints under deflected bending load," *MATEC Web Conf.*, vol. 286, p. 2004, Jan. 2019, doi: 10.1051/mateconf/201928602004.
- [3] E. Chang and W. D. Dover, "Parametric equations to predict stress distributions along the intersection of tubular X and DT-joints," *Int. J. Fatigue*, vol. 21, no. 6, pp. 619–635, Jul. 1999, doi: 10.1016/S0142-1123(99)00018-3.
- [4] E. Chang and W. D. Dover, "Stress concentration factor parametric equations for tubular X and DT joints," *Int. J. Fatigue*, vol. 18, no. 6, pp. 363–387, Aug. 1996, doi: 10.1016/0142-1123(96)00017-5.
- [5] M. R. Morgan and M. M. K. Lee, "Parametric equations for distributions of stress concentration factors in tubular K-joints under out-of-plane moment loading," *Int. J. Fatigue*, vol. 20, no. 6, pp. 449–461, Jul. 1998, doi: 10.1016/S0142-1123(98)00011-5.
- [6] M. Ghanameh, "Etude numérique et expérimentale des jonctions tubulaires soudées 'des plateformes offshore' soumises à des sollicitations complexes : analyse par contrôle non destructif," 2007.
- [7] S. A. Karamanos, A. Romeijn, and J. Wardenier, "Stress concentrations in tubular gap K-joints: mechanics and fatigue design," *Eng. Struct.*, vol. 22, pp. 4–14, 2000.
- [8] S. P. Chiew, C. K. Soh, and N. W. Wu, "General SCF design equations for steel multiplanar tubular XX-joints," *Int. J. Fatigue*, vol. 22, no. 4, pp. 283–293, Apr. 2000, doi: 10.1016/S0142-1123(99)00130-9.
- [9] A. Hobbacher and I. I. of Welding. Joint Working Group XIII-XV., *Fatigue Design of Welded Joints and Components: Recommendations of IIW Joint Working Group XIII-XV, XIII-1539-96/XV-845-96*. Abington, 1996.
- [10] "Welded tubular joints (1987 edition) | Open Library." [https://openlibrary.org/works/OL18922254W/Welded\\_tubular\\_joints](https://openlibrary.org/works/OL18922254W/Welded_tubular_joints) (accessed Dec. 27, 2021).
- [11] M. Efthymiou and S. Durkin, "stress concentrations in t/y and gap/overlap k-joints," 1985.
- [12] Lloyd's Register of Shipping, "OTH 354 Stress concentration factors for simple tubular joints," 1997, Accessed: Dec. 27, 2021.
- [13] H. L. J. Pang and C. W. Lee, "Three-dimensional finite element analysis of a tubular T-joint under combined axial and bending loading," *Int. J. Fatigue*, vol. 17, no. 5, pp. 313–320, Jan. 1995, doi: 10.1016/0142-1123(95)00019-P.

## DYNAMIC MODELING OF A SCARA ROBOT USING A NEW FORMALISM

O. EL BAJI, N. BEN SAID AMRANI, D. SARSRI

Laboratory of Innovative Technologies, National School of Applied Sciences of Tangier, Abdelmalek Essaâdi University

1. otman.elbaji@etu.uae.ac.ma
2. amraninabil10@gmail.com
3. dsarsri@uae.ac.ma

### Abstract

Based on the Newton-Euler formulation, Bertrand and Bruneau [8] developed a new formalism for open loop kinematic chain with only rotational joints. This new formalism has improved the comprehension of multi-body dynamics, i.e. the obtained equations of motion are analytical, direct, compact and decoupled. The aim of this paper is to extend the previous work to make it usable for serial manipulator with general joints (i.e., prismatic and/or rotational). Finally, the SCARA (Selective Compliant Assembly Robot Arm) robot is used to illustrate the simplicity and efficiency of the developed model in generating the inverse dynamic as compared to an available algebraic formulation based on Lagrange Euler formulation.

### Keywords

Serial manipulators, Inverse dynamics, Newton-Euler equations, Uicker/Kahn method, Explicit formalism, Complexity

### 1. Introduction

Several methods have been used for this purpose, among all, the Newton-Euler formulation and the Lagrangian formulation are the most common dynamic modeling methods. These two methods have their own advantages and disadvantages. The advantage of the Newton-Euler method [1,2], is that the number of computations for obtaining the joint generalized forces/torques of a robot manipulator is few. However, it is difficult for it to be applied to the design of control system of the robot manipulator and to get better insight into the structure of the equations, because the Newton-Euler method is such a recursive method.

Whilst, the Lagrange-Euler equations [3,4] for robot manipulators are the most perfect form for the design of control systems and the dynamic simulation of robot manipulators. Unfortunately, the Lagrange-Euler method was computationally time consuming for real-time control. However, none of the approaches aforementioned gives in the one hand a direct and clear relation between the equations of motion and the physical parameters of the systems, in the other hand an efficient formulation. Indeed, the equations of motion are nevertheless formulated using recursive algorithms [1,5] or require heavy

intermediate calculations such as the energy derivation, i.e kinetic and potential energy .

Based on the equations of Newton- Euler, a new algebraic formalism that satisfies all the requirements cited previously has been developed by [6]. This method is very simple, straightforward and systematic. But it was developed especially for a single kinematic chain with only rotational joints. Based on this formulation, a dynamic model was developed for trajectories planning of a Mikron UCP710 multi-axis machining and a KUKA anthropomorphic robot [7].

The main contributions of this paper are

- To improve the previous formalism [6] to make it usable for serial manipulator with revolute and prismatic joints.
- To express the equation of motion in a more compact form (in a matrix form).
- To make a comparative study with a closed form algebraic formulation based on Lagrange - Euler method [3,4].

The paper is organized as follows. Section 2 introduces the new formalism for systems with general joints. In Section 3, the inverse dynamic of the 5 DOF SCARA robot with this formalism is presented. Section 6 discusses the computational issues of this new formalism in comparison with an available algebraic formulation based on Euler-Lagrange method.

### 2. Dynamic modeling of a serial manipulator with general joints by the new formalism

In this section, the previous work presented by [6] is adapted to cover manipulators with revolute or prismatic joints such as:

$$\tau_i = \sum_{k=i}^N \sum_{j=1}^k \left( H_{ij}^k \ddot{q}_j + \beta_{ij}^k \dot{q}^2 + 2\dot{q}_j \sum_{n=1}^{j-1} \zeta_{ijn}^k \dot{q}_n \right) + G_i^k \quad (1)$$

Where the coefficients of the system inertia  $H_{ij}^k$ , the coefficients due to the centrifugal forces  $\beta_{ij}^k$ , the coefficients due to Coriolis forces  $\zeta_{ijn}^k$ , the gravity forces  $G_i^k$ , and the external forces  $Q_i^k$  can be expressed independently of the DoF velocities and accelerations as follows:

$$H_{ij}^k = \left\{ \left[ \bar{\varepsilon}_i \left( \bar{\varepsilon}_j \left( \bar{\varepsilon}_k R^{ik} \Gamma^k R^{kj} - m^k \hat{c}^{ik} R^{ij} \hat{c}^{jk} \right) + \varepsilon_j m^k \hat{c}^{ik} R^{ij} \right) + \varepsilon_i R^{ij} \left( \varepsilon_j m^k 1 - \bar{\varepsilon}_j m^k \hat{c}^{jk} \right) \right] u^j \right\} u^i \quad (2)$$

$$\beta_{ij}^k = \left\{ \bar{\varepsilon}_j \left[ \bar{\varepsilon}_i \left( \bar{\varepsilon}_k R^{ij} \hat{u}^j R^{jk} \Gamma^k R^{kj} - m^k \hat{c}^{ik} R^{ij} \hat{u}^j \hat{c}^{jk} \right) - \varepsilon_i m^k R^{ij} \hat{u}^j \hat{c}^{jk} \right] u^j \right\} u^i \quad (3)$$

$$\zeta_{ijn}^k = \left\{ \bar{\varepsilon}_n \left[ \bar{\varepsilon}_i \left( \bar{\varepsilon}_j \left( \bar{\varepsilon}_k R^{ik} \text{dual}(J^k R^{kn} u^n) R^{kj} - m^k \hat{c}^{ik} R^{in} \hat{u}^n R^{nj} \hat{c}^{jk} \right) + \varepsilon_j m^k \hat{c}^{ik} R^{in} \hat{u}^n R^{nj} \right) + \varepsilon_i R^{in} \hat{u}^n R^{nj} \left( \varepsilon_j m^k 1 - \bar{\varepsilon}_j m^k \hat{c}^{jk} \right) \right] u^j \right\} u^i \quad (4)$$

$$G_i^k = -m^k g \left( \bar{\varepsilon}_i \hat{c}^{ik} R^{i0} u^g + \varepsilon_i R^{i0} u^g \right) u^i \quad (5)$$

As  $\varepsilon_i$  and  $\bar{\varepsilon}_i$  cannot both be nonzero simultaneously, the above expression for  $\tau_i$  is considerably simpler to determine than appears at first sight.

The advantages of this new formulation are: First, it uses 3 x 3 matrices and 3x1 vectors to describe the dynamic of the system which can be exploited to reduce the computational complexity of the closed form equations of motion, whilst an algebraic formulation developed by Uicker/Kahn using 4 x 4 homogeneous transformations and four dimensional vectors has the computational inefficiency.

Second, it clearly improves the comprehension of the equations of motion of a given system:

- By isolating the dynamic forces due to one body with respect to its inertia and mass and with respect to its type of joint translational or rotational.
- By identifying clearly the effect of the inertia, centrifugal, Coriolis, gravity, and external force coefficients of one body on each joint torque.

TABLE 1: NOTATION

N	DoF of the system
$q, \dot{q}, \ddot{q} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$	The vectors of the generalized coordinates, velocities and accelerations
$\varepsilon_i, \bar{\varepsilon}_j = (1 - \varepsilon_j)$	The type of the joint $i$ , $\varepsilon_i$ is zero if the joint $i$ is a revolute type, $\varepsilon_i$ is one if the joint $i$ is a prismatic type
$u^i$	The unit vector related to $q_i$ motion axis.
$m^i$	The mass of the body $S^i$ .
$I^i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	The inertia tensor of $S^i$ relative to $c^i$
$J^i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	The pseudo-inertia tensor of the body $S^i$ relative to $c^i$
$\tau \in \mathbb{R}^{N \times 1}$	The vector of the joint generalized forces.
$R^{ij}$	the rotation tensor defining the orientation of $B^j$ relatively to $B^i$
$\hat{c}^{ik}$	Skew symmetric matrix related to the position of center of mass $c^k$ with respect to frame $i$ origin
$\text{dual}(w)$	Dual operator such as $\text{dual}(w) = \hat{w}$ where $w$ is a vector

### 3. The 5 DOF SCARA manipulator

#### 3.1. General presentation:

The proposed algorithm has been used for the 5 DOF SCARA Robot (Figure 1) [8].

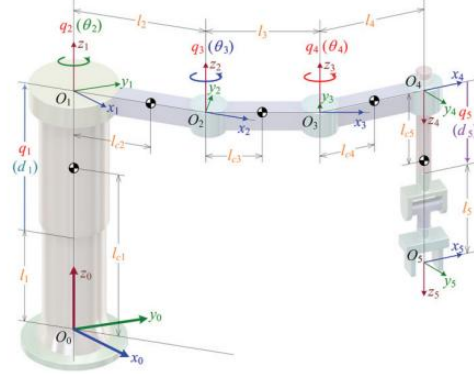


Figure 1. Scheme of the 5 DOF SCARA Robot.

Where  $q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5]^T$  represent the generalized coordinates, for revolute joints  $i = [2, 3, 4]$   $q_i = \theta_i$  and for prismatic joints  $i = [1, 5]$   $q_i = d_i$ . And  $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5$  are the lengths of the bodies: first, second, third, fourth and fifth, respectively, and  $l_{c2}, l_{c3}$  and  $l_{c4}$  represent the lengths from the origins to the CoM of the corresponding second, third and fourth bodies.

#### 3.2. Denavit-Hartenberg convention

TABLE 2. The Denavit-Hartenberg parameters of the manipulator [2]

Joint $i$	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$0^\circ$	$l_1 + d_1$	0	$0^\circ$
2	$\theta_2$	0	$l_2$	$0^\circ$
3	$\theta_3$	0	$l_3$	$0^\circ$
4	$\theta_4$	0	$l_4$	$180^\circ$
5	$0^\circ$	$l_5 + d_5$	0	$0^\circ$

#### 3.3. Closed form inverse dynamics of the manipulator:

The inverse dynamic model of the SCARA manipulator when the external forces are omitted, can be written in a compact form as:

$$\tau = M(q)\ddot{q} + \dot{q}^T C(q)\dot{q} + G(q) \quad (6)$$

In which,  $M(q) \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$  is the mass matrix;  $C \in \mathbb{R}^{5 \times 5 \times 5}$  is the centrifugal and Coriolis matrix;  $G(q) \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$  is the gravitational force;  $q, \dot{q}, \ddot{q} \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$  are the generalized position, velocity, and acceleration, respectively;  $\tau \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$  is the generalized forces vector.

##### 3.3.1. The symmetric inertia matrix:

The inertia matrix for the 5 DOF SCARA manipulator can be written as:

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 & M_{15} \\ 0 & M_{22} & M_{23} & M_{24} & 0 \\ 0 & M_{32} & M_{33} & M_{34} & 0 \\ 0 & M_{42} & M_{43} & M_{44} & 0 \\ M_{51} & 0 & 0 & 0 & M_{55} \end{bmatrix} \quad (7)$$

At joint 3:

$$M_{33} = \sum_{j=3}^5 H_{33}^j = H_{33}^3 + H_{33}^4 + H_{33}^5 \quad (8)$$

$$H_{33}^3 = \left\{ \bar{e}_3 \bar{e}_3 \left( I^3 - m^3 \hat{c}^{33} \hat{c}^{33} \right) z^3 \right\} z^3 = I_{3zz} + m^3 (I_{c3})^2 \quad (9)$$

$$H_{33}^4 = I_{4zz} + m^4 \left[ (I_3)^2 + (I_{c4})^2 + 2I_3 I_{c4} c_4 \right] \quad (10)$$

$$M_{23} = M_{32} = \sum_{j=3}^5 H_{23}^j = H_{23}^3 + H_{23}^4 + H_{23}^5 \quad (11)$$

$$H_{23}^3 = \left\{ \left( R^{23} I^3 R^{33} - m^3 \hat{c}^{23} R^{23} \hat{c}^{33} \right) z^3 \right\} z^2 = I_{3zz} + m^3 (I_{c3}^2 + I_2 I_{c3} c_3) \quad (12)$$

**3.3.2. The symmetric Centrifugal/Coriolis matrices:**

– At the third joint (i=3)

$$B_{32} = \sum_{j=3}^5 \beta_{32}^j = \beta_{32}^3 + \beta_{32}^4 + \beta_{32}^5 = m^3 I_{c3} I_2 s_3 + m^4 (I_{c4} I_2 s_{34} + I_3 I_2 s_3) + m^5 (I_4 I_2 s_{34} + I_3 I_2 s_3) \quad (13)$$

$$C_{342} = \sum_{j=4}^5 \zeta_{342}^j = \zeta_{342}^4 + \zeta_{342}^5 = -m^4 I_{c4} I_3 s_4 - m^5 I_4 I_3 s_4 \quad (14)$$

**3.3.3. Equations of motion:**

The equations of motion at the third joint is given by:

$$\tau_3 = M_{32} \ddot{q}_2 + M_{33} \ddot{q}_3 + M_{34} \ddot{q}_4 + B_{32} \dot{q}_2^2 + B_{34} \dot{q}_4^2 + 2C_{342} \dot{q}_4 \dot{q}_2 + 2C_{343} \dot{q}_4 \dot{q}_3 \quad (15)$$

**4. Comparative study**

**TABLE 3.** Computational complexity for calculating some of the terms of the equations of motion at the third joint by using the Uicker/Kahn’s formulation and the new formalism.

	Terms	Number of multiplications	Number of additions
<b>Uicker/Kahn’s method (see Appendix).</b>	$D_{332}$	44	25
	$D_{343}$	32	18
	$D_{333}$	32	18
	$D_{3322}$	44	25
	$D_{3424}$	56	36
<b>New formalism</b>	$H_{32}^3$	8	4
	$H_{33}^4$	5	3
	$H_{33}^3$	2	1
	$\beta_{32}^3$	8	4
	$\zeta_{324}^4$	15	7

By analyzing the equation of motion at the third joint obtained by the two formalism, the terms  $D_{332}, D_{343}, D_{333}, D_{3322}$  and  $D_{3424}$  given by Uicker/Kahn method can be illustrated to be equivalent to the terms  $H_{32}^3, H_{33}^4, H_{33}^3, \beta_{32}^3, \zeta_{324}^4$ .

Through the table 3, the computation of the inertia coefficients  $D_{332}, D_{343}, D_{333}$ , the centrifugal coefficient  $D_{3322}$  and the Coriolis coefficient  $D_{3424}$  by Uicker/Kahn method requires **208 multiplications** and **122 additions**, however the equivalents ones obtained by the new formulation requires only **38 multiplications** and **19 additions**.

**5. Conclusion:**

Through this paper, the field of multi-body dynamics is revisited and a new systematic formulation is extended to establish an explicit closed form inverse dynamic for a serial manipulator with revolute or prismatic joints. The method depends upon manipulating scalar product of vectors and matrices prior to manipulating differentiation. Owing to the use of 3x3 Matrix instead of 4x4 matrix and the fact to isolate the effect of each body with respect to its mass and inertia and with respect to its type of joint translational or rotational, the computational complexity is reduced from the modeling point of view making it also an efficient and simple model.

**Appendix:** Computation of Certain Typical Coefficients of the SCARA robot by Uicker’s/Kahn Method

For a comparative study with our approach, Uicker/Kahn method will be illustrated through the coefficients of the equation of motion of the SCARA robot at the third joint.

The equation of motion of the third joint is expressed as follows:

$$\tau_3 = \sum_{j=3}^5 \sum_{k=1}^j D_{3jk} \ddot{q}_k + \sum_{j=3}^5 \sum_{k=1}^j \sum_{m=1}^j D_{3jkm} \dot{q}_k \dot{q}_m + \sum_{j=3}^5 D_{3j} \quad (16)$$

**Computation of the inertia coefficients:**

$$D_{332} = \text{Tr}(U_{32} J_3 U_{33}^T) = \text{Tr}(T_0^2 Q_2 T_1^3 J_3 (T_0^2 Q_3 T_2^3)^T) \quad (17)$$

$$D_{333} = \text{Tr}(U_{33} J_3 U_{33}^T) = \text{Tr}(T_0^2 Q_3 T_2^3 J_3 (T_0^2 Q_3 T_2^3)^T) \quad (18)$$

$$D_{343} = \text{Tr}(U_{43} J_4 U_{43}^T) = \text{Tr}(T_0^2 Q_3 T_2^4 J_4 (T_0^2 Q_3 T_2^4)^T) \quad (19)$$

**Computation of the Centrifugal and Coriolis coefficients:**

The centrifugal and coriolis terms present at joint 3 can be done by

$$D_{3322} = \text{Tr}(U_{322} J_3 U_{33}^T) = \text{Tr}(T_0^1 Q_2 Q_2 T_1^3 J_3 (T_0^2 Q_3 T_2^3)^T) \quad (20)$$

$$D_{3424} = \text{Tr}(U_{424} J_4 U_{43}^T) = \text{Tr}(T_0^1 Q_2 T_1^3 Q_4 T_3^4 J_4 (T_0^2 Q_3 T_2^4)^T) \quad (21)$$

# Bowstring Bridge: numerical linear analysis and stress-strain comparison of different suspension removal scenarios

H. Maimouni<sup>1</sup>, B. Kissi<sup>2</sup>, H. Khatib<sup>3</sup>

1. Faculty Benmsik of science, university Hassan II of Casablanca, Morocco; hanaemaimouni16@gmail.com
2. University Hassan II of Casablanca, Morocco; benaissa.kissi@gmail.com
3. University Hassan II of Casablanca, Morocco; hmz.khatib@gmail.com

## Abstract

The following work merges within the challenges of structural engineering, in particular, the progressive collapse of composite bridges. The paper will highlight aspects related to progressive collapse: methods and approaches to design and analyze bridges against progressive collapse, and a case study on a bowstring bridge using Euro codes and Alternative load paths method or suspension lines' removal. The study aims to notice the variation of strain and stress in each scenario and suggest other extensions that can be done based on this paper.

## Keywords

Composite bridges, progressive collapse, Bowstring Bridge, stress, strain.

## 1. Introduction

The progressive collapse has played an important role in many catastrophic events such as the collapse of Alfred P. Murrah Federal Building (Oklahoma City, 1995) and World Trade Center towers (New York, 2001). This event can be defined as the spread of an initial local failure of a structure resulting in partial or total collapse of the latter, triggered by a local action or a local lack of resistance. Although many research efforts have contributed to the progress made until this moment, limited attention was paid to progressive collapse of bridges [1].

## 2. Design methods

Design methods can be classified in two categories: direct methods and indirect methods; indirect methods are related to design prescriptive rules, whilst direct methods are more performance based and refined approaches.

Direct methods can be either preventing local failure or assuming and limiting the local failure [2]. The main direct methods that have been studied in literature are the Alternative load path and Segmentation (or compartmentalization). On the other hand, indirect methods are the prescriptive rules found in codes, guidelines, and literature. The most common ones are providing ductility, enabling catenary action, and setting up tying force.

## 3. Application : Bow string bridge

The case study will present a bowstring bridge's general structural analysis according to Eurocodes with a 3D model in Robot Structural Analysis, observing strain and stress changes while removing suspension lines in different scenarios. The bridge has a total span of 51, 18 m. The method used in this study is Alternative load Path (ALP) based on element removal.

### 3.1 Geometry and cross sections

The structure consists of a composite bowstring bridge formed by a steel deck with beams connected to the arch and its bracings via suspension lines. Its deck supports two sidewalks of 2m each and a 7m tramway platform. Two abutments in both ends support the deck. The arch is inclined with 10° degrees. The structural elements of the bridge are all welded reconstituted section; the next table specifies the sections of each item:

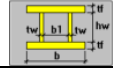
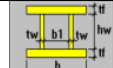

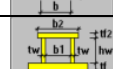
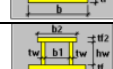
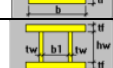
Element	section	b	h <sub>w</sub>	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	t <sub>w</sub>	t <sub>r</sub>	t <sub>r2</sub>
Main girder		60	65	45		2,5	5	
Main girder on supports		60 /75	65	45 /61		2,5	5	
I Beams		40	63			3	6	
Box beams on supports		114	59	103	114	2	3	2
Arch		65	65	59	70	3	5	5
Arch bracing		60	33	50		2,5	2,5	

Table 1: Sections of structural elements

### 3.2 Materials and standards

The materials used for this particular bridge are steel and concrete with the following grades and classification:

- Steel for beams : S355NL
- Steel for suspension lines : S460N
- Concrete for deck : C40/50

The standards used are:

- Actions on structures EN 1991 (EC1)

- Design of infrastructures for the movement of tram-train or light rail type equipment IN3128 (EF 1 C)
  - Design of steel structures EN 1993 (EC3)
- This study focuses only on steel parts of the bridge.

### 3.3 Loads and combination

#### 3.3.1 Loads

The main loads that have been considered in this application are presented in the following table:

Load	Type	Value	Symbol
Weight	Permanent	GBS	$G_1$
Superstructure	Permanent	112,17 KN/ml	$G_2$
Tramway	Moving load	Scheme 302Citadis	$Q_t$
Sidewalk	Traffic load	150 Kg/m <sup>2</sup>	$Q_s$
Wind	Climate loads	GBS ( $P=1,5$ KN/m <sup>2</sup> )	$W$
Temperature	Climate loads	+30°C -40°C	$T$

Table 2: table of loads

**GBS:** generated by software

The 302Citadis scheme is illustrated below:

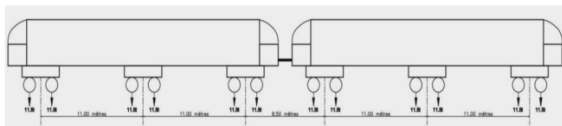


Figure 1 : Citadis 302 load scheme

#### 3.3.2 Linear combinations

The study takes into consideration the following combinations:

Limit state	Combination
ELU fundamental 1	1,35 G + 1,45 $Q_t$ + 1,6 $Q_s$ + 0,9T + 0,9 W
ELU fundamental 2	1,35 G + 1,16 $Q_t$ + 1,5 $Q_s$ + 0,9 T + 0,9 W
ELU fundamental 3	1,35 G + 1,16 $Q_t$ + 1,2 $Q_s$ + 1,5 T + 0,9 W
ELU fundamental 4	1,35 G + 1,16 $Q_t$ + 1,2 $Q_s$ + 0,9 T + 1,5 W
ELS rare 1	G + $Q_t$ + 0,8 $Q_s$ + 0,6 T + 0,6 W
ELS rare 2	G + 0,8 $Q_t$ + 0,6 T + W
ELS rare 3	G + 0,8 $Q_t$ + T + 0,6 W
ELS frequent 1	G + 0,6 $Q_t$
ELS frequent 2	G + 0,5 W
ELS frequent 3	G + 0,6 T + 0,5 W

Table 3 : table of linear combinations

### 3.4 Modelling and methods

The bridge 3D model is created using a software as presented in the figure below. The structure contains several rigid connections, from the center of the deck to the supports in the four ends, and additional ones connecting the arc with the deck.

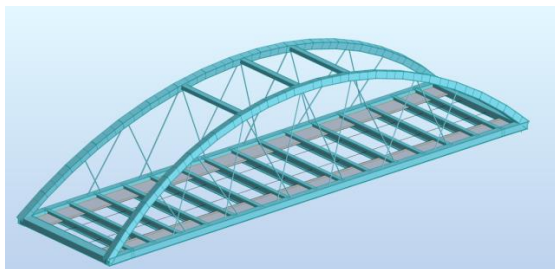


Figure 2 : Bowstring bridge 3D model

In this application, we will study different cases of suspension lines removal while comparing the results of numerical elastic linear analysis, particularly the displacement and the constraints in each case scenario.

### 3.5 Global structural behavior

Before diving into the removal of suspension lines scenarios, it is essential to understand the general structural response of the bridge in its original state.

#### • Strain

The displacement is checked in the service limit state (ELS) for the overall structure:

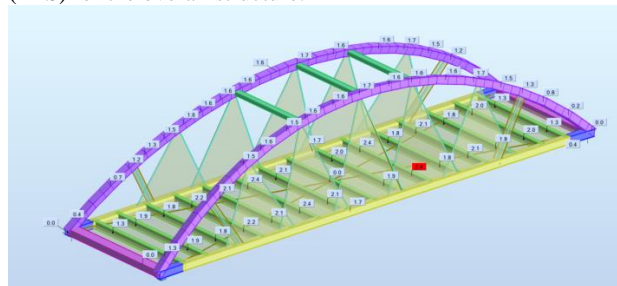


Figure 3 : global strain original state

The maximal displacement as seen is  $u = 2,8\text{cm}$ , which is found in the beams supporting the moving load of tramway traffic, and the other additional loads.

#### • Stress

The constraints however is verified in ultimate limit state (ELU). The extreme results of constraints are as follows:

	stress	combination	Max value (MPa)	Element
Normal stress	S max	ELU FD3	238,11	Arch bracing
	S min	ELU FD1	82,29	Arch
	S max( $M_y$ )	ELU FD1	125,38	I beam
	S max( $M_z$ )	ELU FD3	196,35	Arch bracing
	Fx/Ax	ELU FD1	89,16	Arc
Shear stress	Ty	ELU FD1	15,14	Main girder
	Tz	ELU FD1	181,78	Arch
Torsion stress	Tx	ELU FD3	117,03	Main girder

Table 4: table of max stress values in the original state

The following results will be taken as the original state parameters.

### 3.6 Suspension line removal case scenarios

**Scenario 1:** the removal of the two ends suspension lines

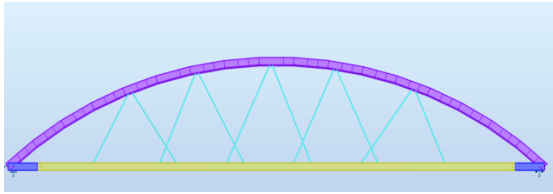


Figure 4 : 3D model of case scenario 1

- **Strain**

The maximal displacement as seen is of  $u=3,4$  cm, which is found in almost the same location as before removing the suspensions.

**Scenario 2:** the removal of the two central suspension lines

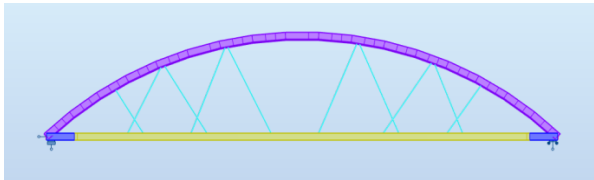


Figure 5: 3D model of case scenario 2

- **Strain**

The maximal displacement as seen is of  $u=3,2$  cm, which is found not in the same location as before suspension line removal nor the removal of the ends' lines.

**Scenario 3:** the removal of more than two adjacent suspension lines

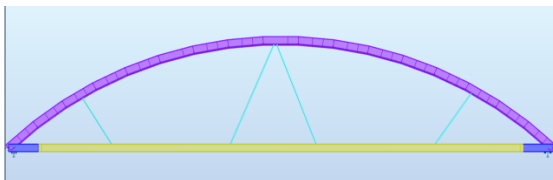


Figure 6: 3D model of case scenario 3

- **Strain**

The maximal displacement as seen is of  $u=5,2$  cm, which is found in the same location as the original model.

#### 4. Result comparison

**Strain :** The previous results show clearly that the strain is more important in the case of removing more than two suspensions; the structure's ability to redistribute loads is better when we have suspensions along the deck, which allow a good continuity and load distribution.

**Stress:** The max values collected in the previous tables were used to draw a graphic that illustrates the variation

of stress values in each of the original state and the three case scenarios.

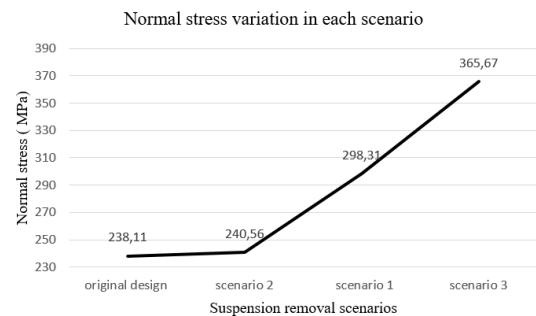


Figure 7: stress variation depending on suspension removal case scenario

The normal stress reaches its maximum value in the third scenario, which also demonstrates that intermediate suspension lines are vital for a better overall structural response, allowing the structural components to distribute loads in a safer manner.

#### 5. Conclusion

The study provides interesting results than can be observed while considering suspension loss scenarios to predict and allow more safety for a structure to redistribute the loads. The ALP method is a good start for designing a bowstring bridge with suspensions or a cable stayed bridge against progressive collapse.

However, this research is not complete and thorough; knowing that combining static and dynamic nonlinear methods as most appropriate when dealing with progressive collapse in bridges. Thus, this work can be extended by performing for example a non-linear analysis, studying other parameters other than strain and stress, and performing the same analysis in a different bridge design.

#### References

- [1] Dasa, A. D. Pandeyb, Soumyac, M. J. Maheshd, P. Sainie, and S. Anveshf , " Progressive collapse of a cable stayed bridge " , 12th International Conference on Vibration Problems, ICOVP 2015, Procedia Engineering 144 ( 2016 ) 132 – 139.
- [2] Uwe Starossek, "Progressive collapse of structures, second edition", Institution of Civil Engineers (ICE), 2018, ISBN 978-0-7277-6168-2.



## Un algorithme d'ordre élevé combinant la Méthode Asymptotique Numérique et une technique d'optimisation du paramètre de forme utilisé dans les Fonctions de Base Radiale pour le calcul élastique non linéaire des structures

Z.Saffah<sup>1</sup>, H. Lahmam<sup>1</sup>, A. Timesli<sup>2</sup>, A. Azouani<sup>3,4</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire d'Ingénierie et Matériaux (LIMAT), Faculté des Sciences Ben M'Sik, Université Hassan II de Casablanca, B.P 7955, Sidi Othman Casablanca, Maroc.

<sup>2</sup> Hassan II University of Casablanca, National Higher School of Arts and Crafts (ENSAM CASABLANCA), AICSE Laboratory, 20670 Casablanca, Morocco.

<sup>3</sup> Université Moulay Sultan Slimane, ENSA Khouribga, Maroc.

<sup>4</sup> Institute of Mathematics I, Free University Arnimallee 2-6, 14195 Berlin, Germany.

### Résumé :

Dans ce travail on propose une nouvelle approche numérique sans maillage basée principalement sur le choix optimal du paramètre de forme des Fonctions de Base Radiale (RBF) pour la résolution des problèmes d'élasticité non linéaire. Le but de la modélisation proposée est l'amélioration de la qualité de la solution du problème posé en comparaison avec une solution de référence. L'ensemble des études effectuées dans ce cadre a fait l'objet de deux articles publiés [1] et [2]. Dans le premier article, le choix du paramètre de forme est déterminé par la minimisation de l'erreur globale de la solution numérique d'un problème posé dans le cadre de l'élasticité non linéaire en comparaison avec la Méthode des Eléments Finis (MEF). Dans le second article, on a proposé un algorithme qui permet d'établir le paramètre de forme optimal en minimisant le résidu du problème non linéaire considéré. L'utilisation de l'algorithme génétique permet aussi d'éviter l'utilisation des matrices d'interpolation mal conditionnées dans la méthode RBF.

Mots clés : élasticité non linéaire, méthode sans maillage, Fonctions de Base radiale, paramètre de forme optimal

### 1. Introduction

Les méthodes sans maillage, basées sur les Fonction de Base Radiale, sont fréquemment utilisées pour la simulation numérique en mécanique telle que la propagation des fissures et les grandes déformations. L'histoire des FBR remonte à l'année 1971 où Hardy [4] a inventé probablement la fonction la plus célèbre dite Multi Quadratique (MQ) pour traiter l'ajustement des surfaces irrégulières en topographie.

La théorie basée sur les Fonctions FBR a été utilisée avec succès dans [5] et elle devient parmi les méthodes efficaces pour la résolution numérique des équations aux dérivées partielles (EDP) [6]. Les FBR dépendent d'un paramètre de forme qui a un effet significatif sur la précision de la dite méthode. Carlson et Foley [7] ont montré que la localisation des points de collocation a une influence négligeable sur la précision de la solution du problème à résoudre devant celle du paramètre de forme. Afin de montrer l'efficacité de l'algorithme proposé, nous considérons deux applications en élasticité non linéaire et dans le cas bidimensionnel à savoir la traction et la flexion d'une plaque rectangulaire.

### 2. Technique de collocation basée sur la méthode FBR

Considérons un ensemble de points  $\mathcal{X}$  dispersés arbitrairement dans un domaine de support local  $\Omega$  et attribuons à chacun de ces points un ensemble de points voisins  $x_j$  inclus dans le domaine  $\Omega$ . L'approximation FBR d'une fonction continue  $f(x)$  peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \Phi(\|x - x_j\|_2) \quad (1)$$

où  $\Phi$  est la fonction de forme (FBR Multi Quadratique et Inverse Multi Quadratique) donnée par :

$$\Phi(\|x - x_j\|_2) = \left( c^2 + \|x - x_j\|_2^2 \right)^q \quad (2)$$

avec  $c$  est le paramètre de forme et  $q$  est une puissance qui définit le type de la fonction de forme choisie:

Le vecteur des coefficients inconnus  $\alpha = {}^T \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$  peut s'exprimer par :

$$\alpha = R^{-1} f \quad (3)$$

avec :

$$R_{ij} = \Phi(\|x_i - x_j\|), i, j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$R$  est la matrice d'interpolation qui contient les fonctions de base radiale.

Afin d'éviter la singularité de la matrice  $R$  on doit choisir un paramètre de forme adéquat, qui nous permettra d'avoir une matrice bien conditionnée accompagné des résultats plus précis.

L'approximation de la fonction  $f(x)$  peut s'écrire encore sous la forme suivante :

$$f(x) = \langle \Phi(x) \rangle R^{-1} f \quad (5)$$

### 3. Formulation forte d'un problème d'élasticité non linéaire

Le problème local associé à une structure élastique non linéaire (non-linéarité géométrique) s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} (\text{div}T)_i = \partial_j T_{ij} = 0 & \forall x \in \Omega \\ S_{ij} = D_{ijkl} \otimes \gamma_{kl}(U) & \forall x \in \Omega \\ \gamma(U)_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j U_i + \partial_i U_j) + \frac{1}{2}\partial_j U_k \partial_i U_k & \forall x \in \Omega \\ U_i = \lambda U_i^d(x) & \forall x \in \Gamma_1 = \partial\Omega_U \\ T_{ij} \cdot N_j = \lambda F_i & \forall x \in \Gamma_2 = \partial\Omega_F \end{cases} \quad (6)$$

Où T et S sont respectivement le premier et le deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff,  $\Omega$  est le domaine occupé par la structure,  $\partial\Omega_U$  et  $\partial\Omega_F$  représentent respectivement les frontières pour un déplacement imposé  $U^d$  et pour un chargement appliqué F. N est le vecteur unitaire normal à la frontière  $\partial\Omega_F$  orienté vers l'extérieur du domaine.

**4. Méthode Asymptotique couplée avec l'approximation locale FBR**

Pour résoudre le problème local (6), on écrit chaque inconnue sous la forme d'un développement en série de Taylor par rapport au paramètre de chemin  $a$  dénotant la longueur d'arc le long d'un arc de solution  $(u(a), \lambda(a))$  soit :

$$\begin{cases} \{T(a)\} = \{T_o\} + \sum_{p=1}^{N_{order}} a^p \{T_p\} \\ \{S(a)\} = \{S_o\} + \sum_{p=1}^{N_{order}} a^p \{S_p\} \\ \{\gamma(a)\} = \{\gamma_o\} + \sum_{p=1}^{N_{order}} a^p \{\gamma_p\} \\ \{U(a)\} = \{U_o\} + \sum_{p=1}^{N_{order}} a^p \{U_p\} \\ \lambda(a) = \lambda_o + \sum_{p=1}^{N_{order}} a^p \lambda_p \end{cases} \quad (7)$$

où  $\{T_o\}, \{S_o\}, \{\gamma_o\}, \{U_o\}$  et  $\lambda_o$  sont des grandeurs évaluées au point initial.

Le paramètre de développement en série de Taylor est défini par [8] :

$$a = \langle U - U_o \rangle \cdot U_1 + (\lambda - \lambda_o) \cdot \lambda_1 \quad (8)$$

Ce qui conduit après identifications des coefficients des différentes puissances du paramètre de chemin  $a$  aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \|U_1\|^2 + \lambda_1^2 = 1 & \text{à l'ordre } p = 1 \\ \langle U_p \rangle \cdot \{U_1\} + \lambda_p \cdot \lambda_1 = 0 & \text{à l'ordre } p \geq 2 \end{cases} \quad (9)$$

En injectant les développements (7) dans le problème non linéaire (6) et en identifiant les coefficients ayant les mêmes puissances du paramètre a, on obtient une suite de problèmes linéaires. En appliquant l'approximation (5) au vecteur inconnu  $\{U_p\}$  et en utilisant la technique d'assemblage des matrices élémentaires, on obtient une suite de problèmes linéaires aux différents ordres données par :

à l'ordre 1: 
$$\begin{cases} \{U_1^*\} = [K_T]^{-1} \{F\} \\ \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{\langle U_1^* \rangle \{U_1^*\} + 1}} \\ \{U_1\} = \lambda_1 \{U_1^*\} \end{cases} \quad (10)$$

à l'ordre  $p \geq 2$ : 
$$\begin{cases} \{U_p^*\} = [K_T]^{-1} \{F_p\} \\ \lambda_p = \frac{-\langle U_p^* \rangle \{U_1\}}{\sqrt{\langle U_p^* \rangle \{U_1\} + \lambda_1}} \\ \{U_p\} = \lambda_p \{U_1^*\} + \{U_p^*\} \end{cases} \quad (11)$$

où  $[K_T]$  est la matrice de rigidité tangente commune à tous les ordres et qui est évaluée au point initial,  $\{F_p\}$  et  $\{U_p\}$  sont respectivement le vecteur force et le vecteur inconnu à l'ordre p. Le rayon de convergence des séries  $a_{max}$  est défini dans la référence [9] par :

$$a_{max} = \left( \epsilon \frac{\| \{U_1\} \|}{\| \{U_p\} \|} \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (12)$$

avec  $\epsilon$  est le paramètre de tolérance.

**5. Estimation du paramètre de forme optimal**

Dans cette étude, le paramètre de forme est donné par la forme :  $c = \beta * ds$ , où  $\beta$  est un coefficient à déterminer et  $ds$  est la distance moyenne entre le point principal  $x$  et les points voisins  $x_j$  les plus proches. L'algorithme génétique d'ordre élevé [10] proposé pour la recherche de la valeur optimale du coefficient  $\beta$  est représenté par l'organigramme de la figure 1.

L'idée est de minimiser l'erreur relative du déplacement à l'ordre 1. Cet estimateur de l'erreur au premier ordre permet d'assurer le bon conditionnement de la matrice tangente  $[K_T]$ .

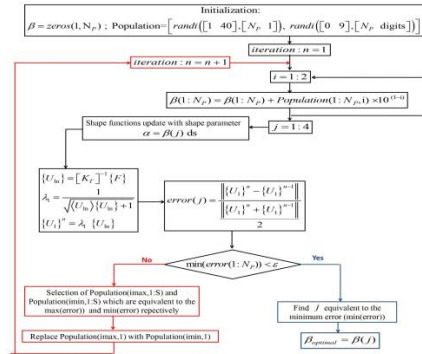


Fig. 1. Organigramme de l'algorithme génétique d'ordre élevé basé sur la valeur optimale du coefficient  $\beta$

**6. Analyse numérique**

Dans cette partie on s'intéresse à analyser l'effet du paramètre de forme sur la solution du problème élastique non linéaire obtenue par l'algorithme d'ordre élevé proposé à l'aide de deux exemples simples. La comparaison de la solution numérique ainsi obtenue est comparée avec celle calculée par la méthode asymptotique numérique (MAN).

**6.1. Cas de la traction d'une plaque rectangulaire**

Ce premier exemple d'application concerne la traction d'une plaque rectangulaire élastique supposée homogène et isotrope, de longueur  $L=100\text{mm}$  et de largeur  $h=50\text{mm}$ . Cette plaque est fixée à son bord défini par  $x=0$  et soumise à un

effort de traction  $\lambda F$  aux points  $x=L$  avec  $F=1MPa$  comme le montre la figure (2) .  $\lambda$  est le paramètre de chargement. Les constantes élastiques de la plaque sont : le module d'Young  $E=200GPa$  et le coefficient de Poisson  $\nu=0.34$ .

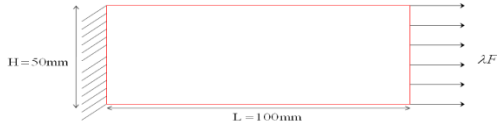


Fig. 2 Plaque élastique soumise à une force de traction  $\lambda F$

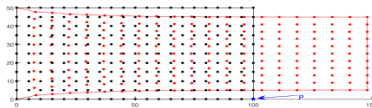


Fig. 3 Simulation de la configuration initiale et la déformée de la plaque en traction pour  $\lambda = 179,690$  avec 11x21 noeuds

La figure 3 représente l'état initial du maillage (en couleur noire) et sa déformée (en couleur rouge) obtenue par l'algorithme d'ordre élevé couplé avec l'algorithme génétique.

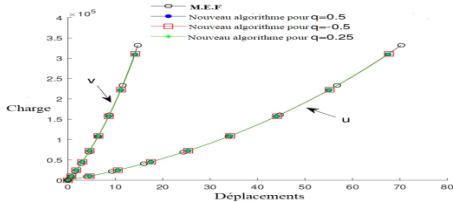


Fig. 4 Evolution de la charge  $\lambda F$  en fonction des déplacements u and v du point test de coordonnées  $(x=0, y=100)$

La figure 4 montre l'évolution de la charge  $\lambda F$  en fonction des déplacements u and v du point test de coordonnées  $(x=0, y=100)$  en utilisant l'algorithme génétique pour le choix du paramètre de forme pour les trois puissances :  $q = 0.5; q = -0.5$  et  $q = 0.25$

Les résultats obtenus sont comparées en avec la MEF

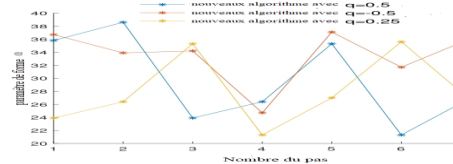


Fig. 5. Variation du paramètre de forme optimal donné par l'algorithme génétique en fonction du pas MAN.

La figure 5 montre que le paramètre de forme optimal obtenu par les trois FBR dépend nettement du pas asymptotique fixé.

**6.2. Cas de la flexion d'une plaque rectangulaire**

Dans cette deuxième application on considère une plaque rectangulaire élastique supposée homogène et isotrope, de longueur  $L=200mm$  et largeur  $h=10mm$  Cette plaque est fixée à son bord défini par  $x=0$  et soumise à un effort de flexion  $\lambda F$  avec  $F=1MPa$  comme le montre la figure 6. Les constantes élastiques de la plaque sont les mêmes que dans le cas précédent.

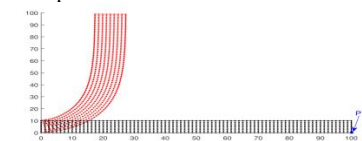


Fig. 6. Simulation de la configuration initiale et la déformée de la plaque en flexion avec 81x9 noeuds

La figure 6 représente l'état initial du maillage (en couleur noire) et sa déformée (en couleur rouge) obtenue par l'algorithme d'ordre élevé couplé avec l'algorithme génétique.

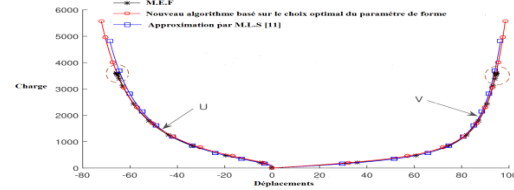


Fig. 7 Evolution des déplacements u et v du point P en fonction du paramètre de chargement  $\lambda$  en utilisant la fonction MQ ( $q = 0.5$ )

Dans la figure (7) On remarque que le calcul à l'aide de l'algorithme d'ordre élevé basé sur la MEF s'arrête, car le rayon de convergence de cet algorithme d'ordre élevé tend vers zéro ce qui montre l'avantage de l'algorithme d'ordre élevé basé sur la méthode de collocation des FBR pour simuler ce genre de problèmes.

**7. Conclusion**

Dans ce travail on a proposé une approche d'ordre élevé combinant la méthode de collocation utilisant les FBR et l'algorithme génétique basée sur la détermination du paramètre de forme optimal. Les résultats numériques obtenus à l'aide de deux exemples d'élasticité plane dans le cas non-linéaire montrent que l'algorithme d'ordre élevé réalisé est efficace en comparaison avec l'algorithme MAN basé sur la M.E.F et la référence [11]

**Références (12 gras)**

[1] Saffah Z., Timesli A., Lahmam H., Azouani A., Amdi M. New collocation path-following approach for the optimal shape parameter using Kernel method. SN Applied Sciences.3, 249 (2021)

[2] Saffah Z., Hassouna S., Timesli A., Lahmam H., Azouani A. RBF collocation path-following approach: optimal choice for shape parameter based on genetic algorithm. MATHEMATICAL MODELING AND COMPUTING, Vol. 8, No. 4, pp. 770–782 (2021)

[3] Buhmann M. Radial basis functions: theory and implementations. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press (2003).

[4] Hardy R. L. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. Journal of Geophysical Research.76(8), 1905–1915 (1971).

[5] Powell M. J. D. The theory of radial basis function approximation in 1990. Advances in numerical Analysis.2, 105–209 (1990).

[6] Bhatia G. S., Arora G. Radial Basis Function Methods for Solving Partial Differential Equations-A Review. Indian Journal of Science and Technology. 9 (45), 1–18 (2016).

[7] Carlson R., Foley T. The parameter R2 in multiquadric interpolation. Computers and Mathematics with Applications.21(9), 29–42 (1991).

[8] Timesli A. Optimized radius of influence domain in meshless approach for modeling of large deformation problems. Iranian Journal of Science and Technology- Transactions of Mechanical Engineering (2021)

[9] Cochelin B. A path-following technique via an asymptotic-numerical method. Computer and Structures.53 (5), 1181–1192 (1994).

[10] Mitchell M. An Introduction to Genetic Algorithms. Cambridge, MA: MIT Press (1996).

[11] Belaasilia Y., Timesli A., Braikat B., Jamal M (2017) A numerical mesh-free model for elasto-plastic contact problems. Eng Anal Bound Elem 82:68–78

# Analysis of Elastoplastic Behaviour of a Bolted Beam-To-Column Joint by Finite Element Method

T.TOUGUI<sup>a</sup>, L. BOUSSHINE<sup>a</sup>

a. Structural and Material Mechanics Team, National High School of Electricity and Mechanics, Hassan II University of Casablanca, Casablanca, Morocco. Email: t.tougui@ensem.ac.ma

## Abstract

This article examines the mechanical behaviour of steel endplate beam-to-column joints with different stiffeners under bending moment. This type of connections is commonly used in steel frameworks and is considered either pinned or rigid [1]. This study aims to show the semi-rigid behaviour of this bolted connection based on a finite element model considering the geometrical, material and contact nonlinearities between the components and the use of stiffeners in different positions. The results showed that using stiffeners in the column or the web flange increases the rigidity and strength of the connection [2].

**Keywords:** joints, connections, stiffeners, endplate, bolts, beam-to-column.

## 1. Introduction

The endplate beam-to-column joints is the most important connection in steel frameworks. In fact, it is used to transmit moments, normal and horizontal efforts from beams to columns. In addition to that, its mechanical behaviour influences widely the whole behaviour of the structure it is used in.

## 2. Geometry of the Connection

### 2.1 Profile's Sections

In this study, four specimens of endplate beam-to-column connections will be analysed. The profile used is a hot rolled HEA 160 for both, the beam and the column with S235 steel. The dimensions of the section are given in table 1.

Table 1: Dimensions of HEA 160 in mm

Dimensions	H	B	$t_w$	$t_f$	r
HEA 160	152	160	6	9	15

The HEA 160 (grade S 235) cross-section is to be classified, in reference to EN 1993-1-1, for the following cases:

- Pure compression in the flanges of the beam and the column ( $c/t < 9\epsilon$ );
- Pure bending in the web of the beam ( $c/t < 72\epsilon$ );
- Bending combined with axial compressive force (weight) in the web of the column ( $c/t < 396\epsilon/[13\alpha-1]$ ).

Each one of the classified members belongs to class 1 which means the entire cross-section belongs to class 1.

### 2.2 Configuration of the Connection

All the studied specimens are characterized by an extended endplate with the use of four bolt rows. The dimensions of the endplate, the position of bolts and their spacing are given in figure 1 with table 2.

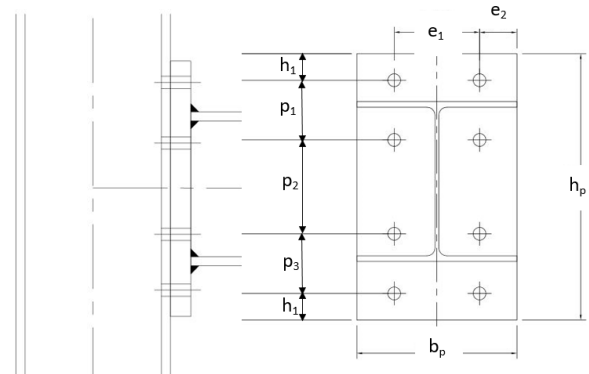


Figure 1: Geometrical details of the connection

Table 2: Values of parameters in figure 1 in mm

$e_1$	$e_2$	$h_1$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$b_p$	$h_p$
70	45	25	60	80	60	160	252

In order to measure the effect of stiffeners on the mechanical behaviour of the connection, the first specimen contains double-web stiffeners. The second specimen contains both types of stiffeners: Transverse stiffeners on the column web and vertical stiffeners on the extended parts of the endplate. The third specimen contains stiffeners only on the column web and the fourth specimen contains stiffeners only on the endplate. For these four specimens, all other parameters are kept unchanged: The endplate thickness is 10 mm and the bolts diameter is 12 mm.

### 2.3 Design of the connection

The studied connection has been designed in reference to EN 1993-1-8 [3] as shown in figure 2. It is to mention that the first specimen was classified as a semi-rigid connection as shown in table 3 with a ratio of 0,97.

The bending moment used for the design is 20 kN.m

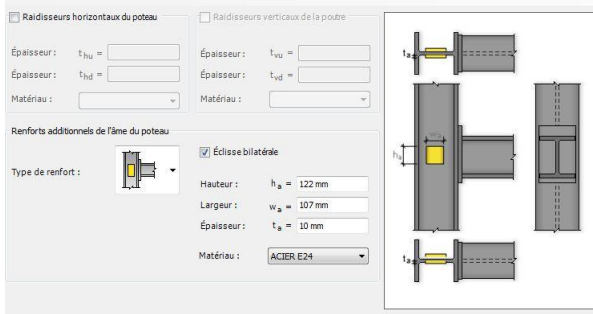


Figure 2: Design of the first specimen

Table 3: Classification of the connection

Classification de l'assemblage par rigidité.

$S_{rig} = 5621,21$ [kN*m]	Rigidité de l'assemblage rigide	[5.2.2.5]
$S_{pin} = 351,33$ [kN*m]	Rigidité de l'assemblage articulé	[5.2.2.5]
$S_{pin} \leq S_{rig} < S_{pin}$ SEMI-RIGIDE		

**COMPOSANT LE PLUS FAIBLE:**  
AILE DU POTEAU EN TRACTION

Assemblage satisfaisant vis à vis de la Norme Ratio 0,97

### 3. Finite Element Model

#### 3.1 Geometry of the Model

The developed model contains six parts as shown in figure 3: The beam (a), the column (b), the bolt (c), the endplate (d), the transverse stiffener (e) and the vertical stiffener (f). The bolt is modelled by one part containing the cylindrical rod (with a diameter equal to that of its unthreaded portion), the nut and the bolt head. The model uses four transverse stiffeners and two vertical stiffeners for the second specimen.

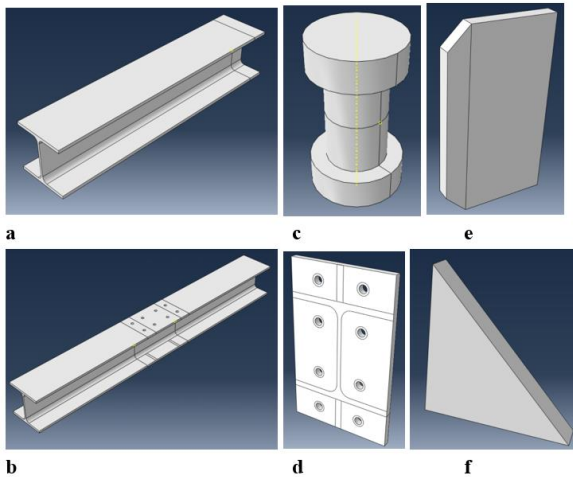


Figure 3: Design of the first specimen

#### 3.2 Material Properties

The profiles, the endplate and the stiffeners used are of steel S235. The effect of bolts is studied based on three different classes as shown in table 4.

Table 4: Steel properties and bolt classes

Materiel	E (MPa)	Fy (MPa)	Fu (MPa)	Poisson Coefficient
Steel S235	210.000	235	360	0.3
Bolt 4.8	210.000	320	400	0.3
Bolt 6.8	210.000	480	600	0.3
Bolt 8.8	210.000	640	800	0.3

#### 3.3 Meshing Pattern

The type of the finite element used is hexagonal volumes that has eight nodes with three degrees of freedom each. The choice of this element is based on several studies reported in the literature. The numerical model developed in the present study contains approximately 60.000 elements without counting the stiffeners. The meshing pattern adopted takes into account the discontinuity zones of the connection by increasing the density and regularity of meshes in these zones as shown in figure 4.

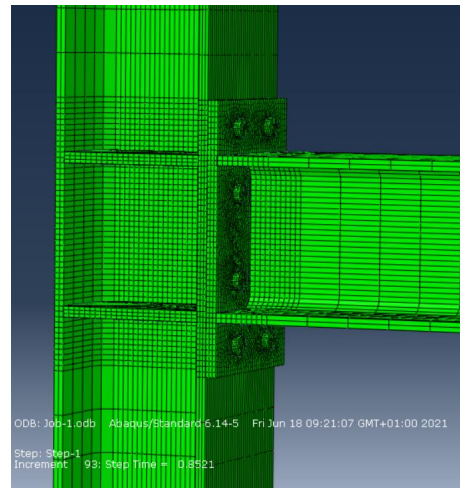


Figure 4: Meshing of the connection

The choice of the size of elements used for the meshing has been justified through the study of its effect on the global behaviour of the connection as shown in figure 5.

#### 3.4 Modelling of Contact

The contact between the different parts of the connection is modelled using surface-to-surface contact laws. The four contact zones around the bolts are:

- 1) Between column flange and endplate
- 2) Between nut and column flange
- 3) Between bolt head and endplate
- 4) Between bolt shank and hole

The figure 6 shows these contacts. In addition to these four zones, the contact between the different stiffeners and the used profiles is modelled using tie constraints between concerned surfaces.

#### 3.5 Boundary Conditions and Loading

The boundary conditions selected in the model are those represented in the figure 7. The loading is applied on the free edge of the beam in order to generate a bending moment in the studied connection.

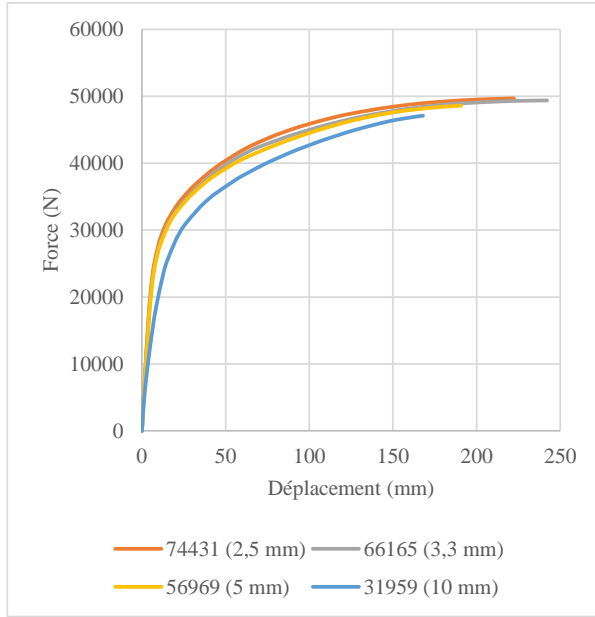


Figure 5: Effect of the size of meshes

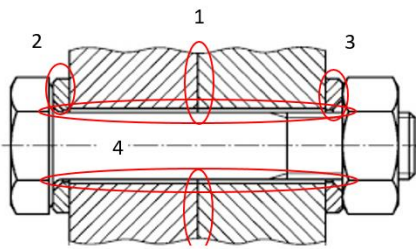


Figure 6: Contact zones around bolts

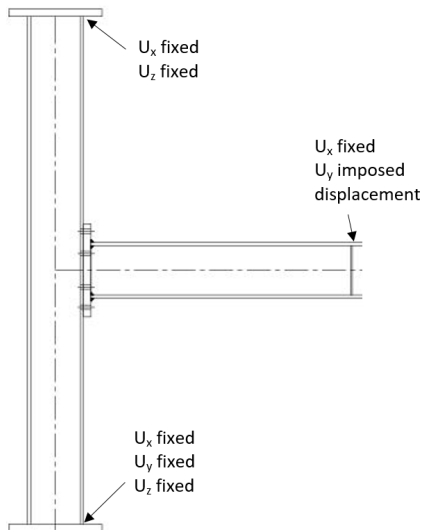


Figure 7: Boundary conditions

#### 4. Results

The figure 8 illustrates the effort-displacement curves at the free edge of the beam of the modelled specimens. It can be observed that the curves studied show a linear behaviour at the

beginning of the loading until reaching the elastic moment of the connection. Then, a nonlinear behaviour with plasticity is observed which corresponds to the plastic moment.

The second specimen shows greater rigidity compared to the other specimens which demonstrates the effect of the use of both types of stiffeners (on the column and between the endplate and the beam) on the behaviour of the connection.

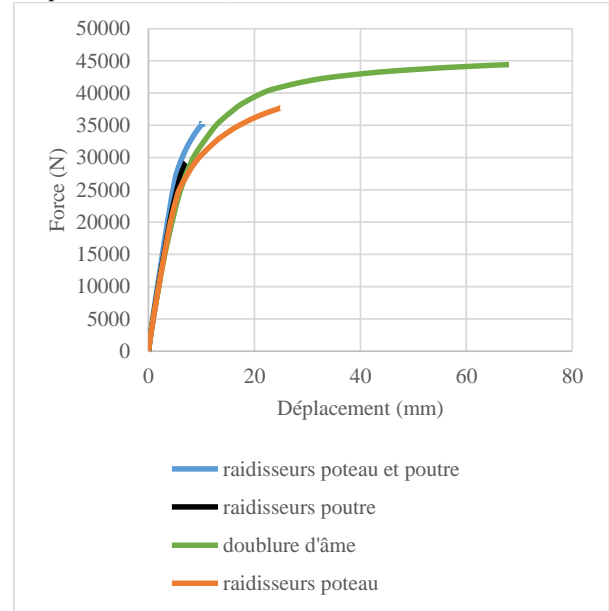


Figure 8: Comparison of the curves of the studied specimens

The figure 9 shows that the change of the class of the bolts does not influence the global behaviour of the connection but it affects the distribution of stresses in these bolts.

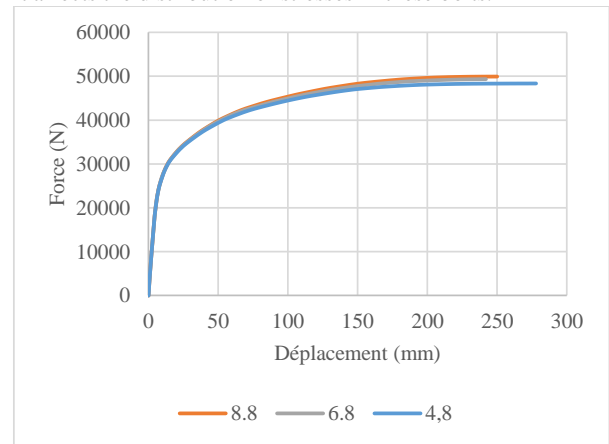


Figure 9: Effect of the classes of the bolts

#### References

- [1] J.P. Jaspart et V. de Ville de Goyet, “Étude expérimentale et numérique du comportement des structures composées de poutres à assemblages semi-rigides”, 1988.
- [2] S.B.M. Boudia et al., “Modeling of bolted endplate beam-to-column joints with various stiffeners” *Journal of Constructional Steel Research*, 167, 2020.
- [3] Eurocode 3: “Calcul des structures en acier. Partie 1-8 : calcul des assemblages » NF EN 1993-1-8. P 06-318-1.

## Couplage de la Méthode des Solutions Fondamentales avec la technique de Décomposition des domaines : Application à l'équation de Laplace

Y. Kharbaoui<sup>1</sup>, O. Askour<sup>1,2</sup>, A. Tri<sup>3,4</sup>, B. Braikat<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire d'Ingénierie et Matériaux (LIMAT), Faculté des Sciences Ben M'Sik, Hassan II University of Casablanca, B.P 7955, Sidi Othman, Casablanca, Morocco.

<sup>2</sup>Laboratoire Matériaux Procédés Environnement Qualité (LMPEQ), Université Cadi Ayyad, Ecole Nationale des Sciences Appliquées de Safi, Morocco

<sup>3</sup>Laboratoire de Mécanique, Faculté des Sciences Ain Chock, Hassan II University of Casablanca, Morocco.

<sup>4</sup>Institut Supérieur des Etudes Maritimes (ISEM), Km 7 Route d'El Jadida, Casablanca, Morocco.

### Résumé

Dans ce travail, nous associons la Méthode des Solutions Fondamentales (MSF) à la technique de décomposition des domaines sans recouvrement pour la résolution de l'équation de Laplace. L'objectif est de stabiliser numériquement la méthode sans maillage en maîtrisant le mal-conditionnement des matrices pleines.

### Mots clefs :

*Méthode sans maillage, Méthode des Solutions Fondamentales, Technique de Décomposition.*

### 1. Introduction

Les méthodes sans maillage, bien qu'en phase de développement, se sont également révélées très prometteuses en raison de leur simplicité et de leur potentiel à résoudre des problèmes complexes. Elles consistent à discrétiser le domaine étudié en points non connectés directement et distribués de manière aléatoire ce qui permet donc de gérer théoriquement des géométries complexes sans trop de difficultés, contrairement aux méthodes avec maillage, en l'occurrence la Méthode des Éléments Finis (MEF), où la connectivité inter-élémentaire est primordiale. Parmi ces méthodes, on cite la Méthode des Solutions Fondamentales (MSF) [1–6] qui a été initialement introduite par Kupradze et Aleksidze en 1964 et qui a été largement utilisée efficacement pour l'approximation numérique d'une grande variété de problèmes physiques. Le concept général de cette technique consiste à approcher la solution par une combinaison linéaire de solutions fondamentales prises sur des points sources situées sur une frontière fictive contenant le domaine d'étude. Dans ce travail, on combine la MSF à une technique de décomposition [7] afin de minimiser les instabilités numériques en agissant sur le mal-conditionnement des matrices pleines du système à résoudre. Pour faciliter la compréhension, nous l'avons appliqué à l'équation de Laplace.

### 2. Couplage de la Méthode des Solutions Fondamentales avec la technique de décomposition des domaines pour l'équation de Laplace

On considère le problème de Laplace suivant :

$$\begin{cases} \Delta(u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

Grâce à la MSF, la solution  $u$  du problème (1) en 2D s'écrit :

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{N_s} \alpha_j G_j(r) \quad (2)$$

avec  $G_j(r)$  sont les solutions fondamentales de l'opérateur

Laplace qui s'illustrent comme suit :

$$G(r) = \frac{1}{2\pi} \log(r) \quad (3)$$

Où  $r = \sqrt{(x_j - x_{s,j})^2 + (y_j - y_{s,j})^2}$

En appliquant la technique de décomposition des domaines, le problème global s'écrit si l'on considère deux sous-domaines sans recouvrement de la façon suivante :

$$\begin{cases} \Delta(u_1) = 0 ; & \text{Dans } \Omega_1 \\ u_1 = g ; & \text{Sur } \partial\Omega_1 \\ \Delta(u_2) = 0 ; & \text{Dans } \Omega_2 \\ u_2 = g ; & \text{Sur } \partial\Omega_2 \\ u_1 = u_2 ; & \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \\ \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = -\frac{\partial u_1}{\partial n_2} ; & \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \end{cases} \quad (4)$$

Où  $u_1$  et  $u_2$  représentent les solutions dans les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  respectivement. Dans la suite, on introduit les indices 1 et 2 pour différencier les paramètres entre les deux domaines.

La MSF nous permet d'obtenir le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N_{s1}} \alpha_{j1} \Delta G_{j1}(r) = 0; & \text{Dans } \Omega_1 \\ \sum_{j=1}^{N_{s1}} \alpha_{j1} G_{j1}(r) = g; & \text{Sur } \partial\Omega_1 \\ \sum_{j=1}^{N_{s2}} \alpha_{j2} \Delta G_{j2}(r) = 0; & \text{Dans } \Omega_2 \\ \sum_{j=1}^{N_{s2}} \alpha_{j2} G_{j2}(r) = g; & \text{Sur } \partial\Omega_2 \\ \sum_{j=1}^{N_{s1}} \alpha_{j1} G_{j1}(r) = \sum_{j=1}^{N_{s2}} \alpha_{j2} G_{j2}(r); & \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \\ \sum_{j=1}^{N_{s1}} \alpha_{j1} \frac{\partial G_{j1}}{\partial n_1} = -\sum_{j=1}^{N_{s2}} \alpha_{j2} \frac{\partial G_{j2}}{\partial n_2}; & \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \end{cases} \quad (5)$$

Sous forme matricielle, le système (5) devient :

$$\begin{bmatrix} [G_1]_{N_{b1},N_{S1}} & [0]_{N_{b1},N_{S2}} \\ [0]_{N_{b2},N_{S1}} & [G_2]_{N_{b2},N_{S2}} \\ [G_1]_{N_r,N_{S1}} & -[G_2]_{N_r,N_{S2}} \\ [\nabla G_1]_{N_r,N_{S1}} & -[\nabla G_2]_{N_r,N_{S2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{j1} \\ \alpha_{j2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [g]_{N_{b1},1} \\ [g]_{N_{b2},1} \\ [0]_{N_r,1} \\ [0]_{N_r,1} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Avec  $N_r$  est le nombre de points de raccord entre les deux sous domaines,  $N_{b1}$  est le nombre de points de la frontière réelle du premier sous domaine,  $N_{b2}$  est le nombre de points de la frontière réelle du deuxième sous domaine,  $N_{S1}$  est le nombre de points sources de la frontière fictive du premier sous domaine,  $N_{S2}$  est le nombre de points de la frontière fictive du deuxième sous domaine. Une fois les coefficients  $\alpha_{j1}$  et  $\alpha_{j2}$  sont déterminés, les solutions sont alors données par :

$$\begin{cases} u_1 = \sum_{j=1}^{N_{S1}} \alpha_{j1} G_{j1}(r) \\ u_2 = \sum_{j=1}^{N_{S2}} \alpha_{j2} G_{j2}(r) \end{cases} \quad (7)$$

### 3. Application numérique

#### 3.1. Décomposition d'un domaine rectangulaire

On considère une structure carrée de coté  $L = 11$ . Ce domaine est décrit par une distribution de 11 nœuds suivant l'axe  $x$  et 11 nœuds suivant l'axe  $y$ .

Dans les quatre décompositions suivantes, la frontière fictive est prise sous forme circulaire de rayon  $R_{FS} = 20$  pour chaque sous-domaine. Sur les figures (1-3), on représente les résultats numériques et analytiques pour différentes décompositions du domaine. On constate que pour les différents sous-domaines (2, 3 et 4 sous domaines) les solutions numériques coïncident exactement avec celles analytiques.

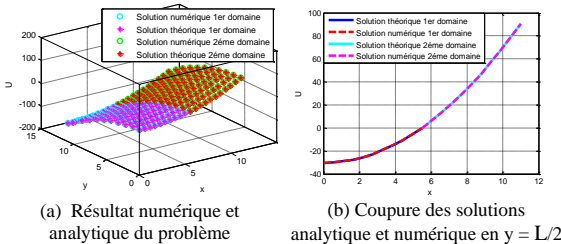


Figure 1 : Résultats pour une décomposition de 2 sous domaines

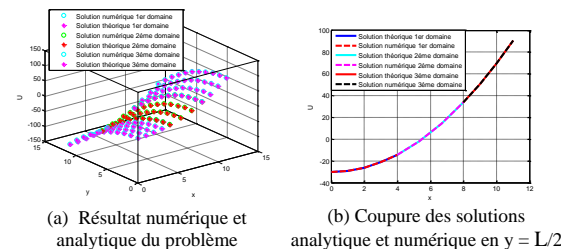


Figure 2 : Résultats pour une décomposition de 3 sous domaines

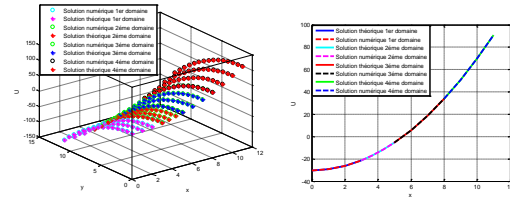


Figure 3 : Résultats pour une décomposition de 4 sous domaine

Sur les tableaux (1-3), on reporte les erreurs  $RMSE1 = \sqrt{\frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} (\tilde{u}_{1,i} - u_{1,i})^2}$  et  $RMSE2 = \sqrt{\frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} (\tilde{u}_{2,i} - u_{2,i})^2}$  avec  $N_1$  et  $N_2$  est le nombre total de nœuds de 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> domaine,  $\tilde{u}_{1,i}$  et  $\tilde{u}_{2,i}$  désigne la solution numérique du 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> domaine et  $u_{1,i}$ ,  $u_{2,i}$  est la solution analytique du 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> domaine, et le conditionnement pour les décompositions en 2, 3 et 4 sous domaines en variant la fonction du second terme  $g(x, y)$ .

Fonctions $g(x,y)$	RMSE et COND	Deux sous domaine	Un seul domaine
$g_1 = e^x \sin(y)$	RMSE1	2.3059 $10^{-6}$	0.0540
	RMSE2	3.0705 $10^{-4}$	
	COND	3.8891 $10^{17}$	2.0483 $10^{12}$
$g_2 = (x^2 - 1) - (y^2 - 1)$	RMSE1	3.0247 $10^{-13}$	1.9007 $10^{-8}$
	RMSE2	8.2302 $10^{-11}$	
	COND	3.8891 $10^{17}$	2.0483 $10^{12}$

Tableau 1 : Erreurs quadratiques moyennes et conditionnement pour deux sous domaine

Fonctions $g(x,y)$	RMSE et COND	Trois sous domaine	Un seul domaine
$g_1 = e^x \sin(y)$	RMSE1	6.7283 $10^{-6}$	0.0540
	RMSE2	1.6977 $10^{-5}$	
	RMSE3	4.9464 $10^{-6}$	2.0483 $10^{12}$
	COND	3.4305 $10^{17}$	
$g_2 = (x^2 - 1) - (y^2 - 1)$	RMSE1	2.1688 $10^{-12}$	1.9007 $10^{-8}$
	RMSE2	1.4086 $10^{-12}$	
	RMSE3	5.8306 $10^{-12}$	2.0483 $10^{12}$
	COND	3.4305 $10^{17}$	

Tableau 2 : Erreurs quadratiques moyennes et conditionnement pour trois sous domaine

Fonctions $g(x,y)$	RMSE et COND	Quatre sous domaine	Un seul domaine
$g_1 = e^x \sin(y)$	RMSE1	1.1823 $10^{-6}$	0.0540
	RMSE2	2.6025 $10^{-8}$	
	RMSE3	2.3955 $10^{-7}$	2.0483 $10^{12}$
	RMSE4	1.1508 $10^{-6}$	
	COND	1.0726 $10^{18}$	
$g_2 = (x^2 - 1) - (y^2 - 1)$	RMSE1	6.7358 $10^{-14}$	1.9007 $10^{-8}$
	RMSE2	2.9500 $10^{-14}$	
	RMSE3	2.0593 $10^{-14}$	2.0483 $10^{12}$
	RMSE4	1.6822 $10^{-13}$	
	COND	1.0726 $10^{18}$	

Tableau 3 : Erreurs quadratiques moyennes et conditionnement pour quatre sous domaine

De ces résultats, on obtient des solutions avec des erreurs quadratiques moyennes très petites variant entre  $10^{-6}$  et  $10^{-14}$ . Néanmoins, une légère augmentation du conditionnement est observée passant de  $10^{12}$  pour un seul domaine à  $10^{17}$  dans le cas de 2 sous domaines et qui reste stable dans le cas d'une décomposition de 4 sous domaines.

#### 3.2. Décomposition d'une structure circulaire

Pour le deuxième exemple, on considère une structure



circulaire de rayon  $R = 1$  qu'on a décomposé en sous-domaines de forme circulaire. Pour les quatre décompositions, la frontière fictive est prise sous forme circulaire de rayon  $R_{FS} = 2$  pour chaque sous-domaine. Dans les figures 4, 5 et 6, on reporte les solutions pour différentes décompositions circulaires puis les erreurs relatives et les conditionnements sont présentés dans les tableaux 4, 5 et 6.

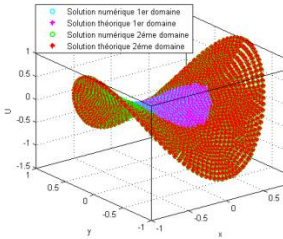


Figure 4 : Résultat numérique pour deux sous domaine

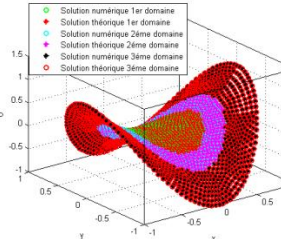


Figure 5 : Résultat numérique pour trois sous domaine

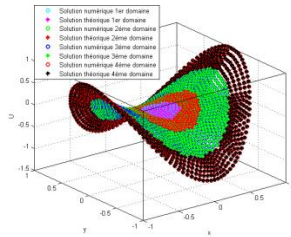


Figure 6 : Résultat numérique pour quatre sous domaine

Fonctions $g(x,y)$	RMSE et COND	Deux sous domaine	Un seul domaine
$g_1 = e^x \sin(y)$	RMSE1	$9.1613 \cdot 10^{-16}$	$2.2334 \cdot 10^{-14}$
	RMSE2	$4.4459 \cdot 10^{-14}$	
	COND	$1.0786 \cdot 10^{17}$	
$g_2 = (x^2 - 1) - (y^2 - 1)$	RMSE1	$3.6560 \cdot 10^{-16}$	$1.1370 \cdot 10^{-13}$
	RMSE2	$1.0879 \cdot 10^{-13}$	
	COND	$1.0786 \cdot 10^{17}$	

Tableau 4 : Erreurs quadratiques moyennes et conditionnement pour deux sous domaine

Fonctions $g(x,y)$	RMSE et COND	Trois sous domaine	Un seul domaine
$g_1 = e^x \sin(y)$	RMSE1	$5.2206 \cdot 10^{-16}$	$2.2334 \cdot 10^{-14}$
	RMSE2	$1.0729 \cdot 10^{-15}$	
	RMSE3	$1.7827 \cdot 10^{-13}$	
	COND	$1.6860 \cdot 10^{17}$	
$g_2 = (x^2 - 1) - (y^2 - 1)$	RMSE1	$8.9222 \cdot 10^{-16}$	$1.1370 \cdot 10^{-13}$
	RMSE2	$1.1456 \cdot 10^{-15}$	
	RMSE3	$2.0377 \cdot 10^{-13}$	
	COND	$1.6860 \cdot 10^{17}$	

Tableau 5 : Erreurs quadratiques moyennes et conditionnement pour trois sous domaine

Fonctions $g(x,y)$	RMSE et COND	Quatre sous domaine	Un seul domaine
$g_1 = e^x \sin(y)$	RMSE1	$7.2623 \cdot 10^{-16}$	$2.2334 \cdot 10^{-14}$
	RMSE2	$5.9540 \cdot 10^{-14}$	
	RMSE3	$1.0635 \cdot 10^{-15}$	
	RMSE4	$5.2782 \cdot 10^{-15}$	
	COND	$1.4814 \cdot 10^{17}$	
$g_2 = (x^2 - 1) - (y^2 - 1)$	RMSE1	$7.8411 \cdot 10^{-16}$	$1.1370 \cdot 10^{-13}$
	RMSE2	$7.4443 \cdot 10^{-16}$	
	RMSE3	$9.9669 \cdot 10^{-16}$	
	RMSE4	$4.5152 \cdot 10^{-14}$	
	COND	$1.4814 \cdot 10^{17}$	

Tableau 6 : Erreurs quadratiques moyennes et conditionnement pour quatre sous domaines

Les résultats obtenus montrent que les erreurs RMSE diminuent lorsqu'on augmente le nombre de sous-domaines. On remarque aussi que le conditionnement se stabilise autour de  $10^{17}$ . Ces résultats sont très encourageants pour travailler avec un grand nombre de sous-domaines ce qui rendra la MSF plus stable et par suite plus attractive pour résoudre des problèmes complexes.

#### 4. Conclusion

Dans ce travail, nous avons combiné la technique des sous-domaines sans recouvrement avec la Méthode des Solutions Fondamentales pour le cas de l'équation de Laplace. Les exemples numériques ont montré la robustesse de notre algorithme de telle sorte que les erreurs quadratiques moyennes étaient très petites avec un conditionnement stable pour différents types de géométries.

Des travaux sont en cours pour l'automatisation de cette technique afin de l'appliquer à un très grand nombre de sous-domaines.

#### Références

[1] Mathon, R., & Johnston, R. L. (1977). The approximate solution of elliptic boundary-value problems by fundamental solutions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 14(4), 638-650.

[2] Johnston, R. L., & Fairweather, G. (1984). The method of fundamental solutions for problems in potential flow. *Applied Mathematical Modelling*, 8(4), 265-270.

[3] Alves, C. J. S., & Chen, C. S. (2005). A new method of fundamental solutions applied to nonhomogeneous elliptic problems. *Advances in Computational Mathematics*, 23(1-2), 125-142.

[4] Askour, O., Tri, A., Braikat, B., Zahrouni, H., & Potier-Ferry, M. (2016). Méthode des Solutions Fondamentales et techniques de régularisation pour l'élasticité linéaire.

[5] Askour, O., Tri, A., Braikat, B., Zahrouni, H., & Potier-Ferry, M. (2018). Method of fundamental solutions and high order algorithm to solve nonlinear elastic problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 89, 25-35.

[6] Askour, O., TRI, A., Braikat, B., Zahrouni, H., & Potier-Ferry, M. (2017). Coupling of MSF and anm for solving nonlinear elasticity problems. In *Congrès français de mécanique*. AFM, Association Française de Mécanique.

[7] Smith, B. F., Bjorstad, P. E., Gropp, W. D., & Pasciak, J. E. (1998). Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations. *SIAM Review*, 40(1), 169-170.

## Modeling elastoplastic structures in finite transformation by a high-order algorithm

C. EL KIHAL<sup>1\*</sup>, O. ASKOUR<sup>2</sup>, Y. BELAASILIA<sup>1</sup>, A. HAMDAROU<sup>1</sup>, B. BRAIKAT<sup>1</sup>, N. DAMIL<sup>1</sup>, M.

POTIER-FERRY<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire d'Ingénierie et Matériaux LIMAT, Faculté des Sciences Ben M'Sik, Hassan II University of Casablanca, B.P 7955 Sidi Othman, Casablanca, Morocco

<sup>2</sup> MCSCSL, National School of Applied Sciences of Safi, Cadi Ayyad University, Safi - 46000, Morocco

<sup>3</sup> Université de Lorraine, CNRS, Arts et Métiers ParisTech, LEM3, F-57000 Metz, France

\*Email: chafik.elkihal@gmail.com Tel : +212 665251565

### Abstract :

In this work we present a high-order algorithm, based on the techniques of the Asymptotic Numerical Method, for computing elastoplastic structures in large deformation. In the case of a uniaxial tensile test, the 2D structure is subjected to the action of load and unload. We discuss the influence of the regularization parameters of the elastoplastic behavior law for different loading paths. We examine the quality of the solution by studying the residual of the problem.

**Keywords :** *Asymptotic Numerical Method (ANM), Elasto-Plasticity, Finite transformation, Regularization.*

### 1 Introduction

Algorithms based on Newton-Raphson type prediction-correction methods for solving elastoplasticity problems in finite transformations are widely used in most of the industrial codes, one can consult for example the references in [1]. In this work, we present and discuss a new algorithm, which generalizes the one used in references [2,4] and [3], for solving large deformation elastoplasticity problems, based on the techniques of the Asymptotic Numerical Method (ANM): computation of the solution branch by branch using Taylor series representations for each branch, discretization technique by using finite element method and use of a continuation technique. In order to use a Taylor series representation of the sought solution in the ANM, we propose to replace the initial finite transformation elastoplastic behavior law by a new regularized finite transformation elastoplastic behavior law, four regularization parameters are used. The robustness of the proposed algorithm is tested in the case of tensile loading and unloading of a 2D elastoplastic structure. We discuss the effect of regularization for different loading paths by examining the residual of the studied problem. Comparisons with the results of the industrial code Abaqus confirm the robustness and efficiency of the proposed algorithm.

### 2 Finite transformation elastoplasticity problem and the proposed algorithm

We consider a finite transformation of an elastoplastic solid occupying the domain  $\Omega_0$  and subjected to external load  $C(t)F_{ext}$  proportional to a time dependent load parameter  $C(t)$  on the boundary  $\partial\Omega_0$ . Neglecting body and inertial forces and using the principle of virtual work, the equilibrium equations can be written in the form:

$$\int_{\Omega_0} \boldsymbol{\tau} : \delta \mathbf{f} : \delta \mathbf{L} d\Omega_0 = C(t) \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{F}_{ext} \cdot \delta \mathbf{v} dS_0 \quad (1)$$

where  $\boldsymbol{\tau}$  is the Kirchhoff stress tensor,  $\mathbf{L}$  is the velocity gradient tensor,  $\mathbf{f}$  is the inverse of the transformation gradient tensor  $\mathbf{F}$  and  $\mathbf{v}$  is the velocity vector. Within the elastoplastic finite transformation, the Jauman's objective derivative of the stress is linked to the total strain rate  $\mathbf{D}$  and the plastic strain rate  $\mathbf{D}^P$  :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^J &= \mathbf{C}^{elas} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^P) \\ \mathbf{D}^P &= \dot{\lambda} \frac{\partial f_y}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \dot{\lambda} \mathbf{n} \end{aligned} \quad (2)$$

where  $\mathbf{C}^{elas}$  is the fourth order tensor of elastic constants,  $\dot{\lambda}$  is the time derivative of the plastic multiplier,  $\mathbf{n}$  is the flow direction tensor and  $f_y$  is the yield function. To express the plastic strain rate, one must take into consideration the unilateral condition between the plastic multiplier and the yield function, which can be reformulated in the form of the Kuhn-Tucker's condition.

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad ; \quad f_y \leq 0 \quad ; \quad \dot{\lambda} f_y = 0 \quad (3)$$

By regularizing the non-analytical equations (3), the new regularized plastic multiplier is written as :

$$\dot{\lambda} = G(f_y)H(\mathbf{D}) \quad (4)$$

where the function  $G$  regularizes the elastic-plastic transition and the function  $H$  regularizes the elastic unload:

$$\begin{aligned} G(f_y) &= \frac{\eta_3}{\frac{f_y^2}{2\mu} \tau_e + \eta_3 \left( \frac{3}{2} + \frac{h}{2\mu} (1+f_y) \right)} \\ H(H - \mathbf{n} : \mathbf{D}) &= \frac{\eta_2^2 \dot{\tau}_c^2}{\eta_2^2 \dot{\tau}_c^2} \end{aligned} \quad (5)$$

where  $h$  is the hardening modulus,  $\mu$  is the shear modulus and  $\tau_e$  is the effective stress. The von-Mises equivalent stress has been also regularized  $q = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\tau}^d : \boldsymbol{\tau}^d + \eta_1^2 \tau_y^2}$ . We have thus introduced three regularization parameters in the behavior law:  $\eta_1$  in the definition of the equivalent stress,  $\eta_2$  and  $\eta_3$  in the definitions of the  $H$  and  $G$  functions in (4) and (5), where  $\dot{\tau}_e$  is a given parameter. In order to evaluate the efficiency of the proposed high order algorithm, in an elastic, plastic and elastic unloading process, we choose to study the loading paths shown in figure 2, defined by a relation giving the loading parameter as a function of time in a regularized form:

$$\left(C - \frac{C_m}{T_m}t\right)\left(C - C_m\left(2 - \frac{t}{T_m}\right)\right) = \eta_4^2 C_m^2 \quad (6)$$

$C_m$  and  $T_m$  are two given parameters that determine the maximum of the loading  $C(t)$  and the time interval and  $\eta_4$  is the fourth regularized parameter in the problem. Three couples of values  $(C_m, T_m)$  will be tested. In the ANM, the unknown  $\mathbf{U}$  ( $\mathbf{U}$  contains all the unknowns of the problem) and the loading parameter  $C(t)$  are represented in the form of a truncated power series at order  $N$  as follow:

$$\begin{cases} \mathbf{U}(a) = \mathbf{U}^j + \sum_{k=1}^N a^k \mathbf{U}_k \\ C(a) = C^j + \sum_{k=1}^N a^k C_k \end{cases} ; a \in [0, a_{max}] \quad (7)$$

where  $(\mathbf{U}^j, C^j)$  is a known and regular solution. A Riks pseudo-arc-length parametrization, based on the time "t", and the load parameter  $C(t)$  is used to defined the path parameter "a":

$$a = (t - t^j)t_1 + (C - C^j)C_1 \quad (8)$$

where  $(t_1, C_1)$  is the tangent vector at the starting point  $(t^j, C^j)$ . The discretized velocity vectors  $\mathbf{v}_{k-1}$  at order  $k$  using a classical finite element method, are solutions of linear problems having the same stiffness matrix:

$$[K_t] \{\mathbf{v}_{k-1}\} = C_k \{F^{ext}\} + \{P_k^{nl}\} \text{ for } 1 \leq k \leq N \quad (9)$$

where  $\{P_k^{nl}\}$  is a vector that depends on the previous orders. In order to have the whole solution branch, we use a continuation method. For this respect we define a validity range of the parameter  $a_{max}$  by the following relation:

$$a_{max} = \inf \left( \delta_s \frac{\|\{U_i^i\}\|}{\|\{U_N^i\}\|} \right)^{\frac{1}{N-1}} \quad (10)$$

where  $U^i$  is a component "i" of the vector  $\mathbf{U}$  and  $\delta_s$  is a tolerance parameter. In this work within plasticity, we define the validity range  $a_{max}$  as the smaller one corresponding to each component of the vector  $\mathbf{U}^i$ . The solution  $\mathbf{U}^j = \mathbf{U}(a_{max})$ ,  $C^j = C(a_{max})$  is a new starting solution for the following ANM step. The complete solu-

tion branch is obtained step by step via this technique.

### 3 Numerical Results and discussion

We consider the example of a 2D elastoplastic plate with length  $L = 250mm$ , width  $40mm$  and two imperfections located at the mid-upper and mid-lower at the middle of the plate. The mechanical characteristics of the plate are: Young modulus  $E = 190.10^3 MPa$ , Poisson ratio  $\mu = 0.29$ , initial yield stress  $\tau_y = 340MPa$  and a hardening modulus  $h = 300MPa$ . The plate is subjected to an uniaxial tension by applying a time-dependent horizontal loading function at the left and right ends.

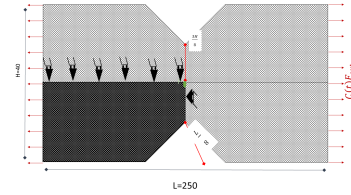


Figure 1: Geometrical description and loading of the 2D plate, and symmetry conditions of the plate quarter.

For symmetry reasons, only the quarter of the plate will be considered. The chosen ANM order is  $N = 15$  and the tolerance  $\delta_s = 10^{-3}$ . After several tests, the optimal regularization parameters used for this simulation are  $\eta_1 = 10^{-2}$ ,  $\eta_2 = 10^{-4}$ ,  $\eta_3 = 10^{-4}$  and  $\eta_4 = 5.10^{-4}$ . In Figure 3, we represent the solution obtained by the proposed algorithm in the case of three loading processes, see equation (6) and figure 2:  $(C_m = 29, T_m = 29)$ ,  $(C_m = 30, T_m = 30)$  and  $(C_m = 31, T_m = 31)$ . In Figure 3, we represent the equivalent plastic strain versus the von-Mises equivalent stress during the simulation at the middle of the plate (point P in figure 1). For the three load tests, we can notice that the results obtained are in good agreement with the solution obtained by Abaqus in the three zones: elastic zone, plastic zone and elastic discharge zone. In this figure, we have represented the Abaqus solution only in the case of loading  $(C_m, T_m) = (31, 31)$ . From this figure we can see the influence of a slight difference in loading (in the values of  $T_m$  and  $C_m$ ) on the response curve and therefore on the residual deformation, this is due to the fact that we are in the presence of a large elastoplastic deformation. At discharge we obtain a deformation of about 25% in the third loading.

In figure 4, we have represented the quality of the solutions obtained by the proposed algorithm for the three loading cases. We have represented the decimal logarithm of the equilibrium residual as a function of time for the three loading cases. Note that the solution curve

of figure 3 was obtained in 111 ANM steps which corresponds to 111 inversions of the tangent matrix. We can observe on figures 3 and 4, that for the three loading process we obtain a good quality of solutions in the elastic and plastic phases (until  $t = T_m$ ) and that the quality degrades slightly during the elastic discharge phase for the chosen ANM parameters.

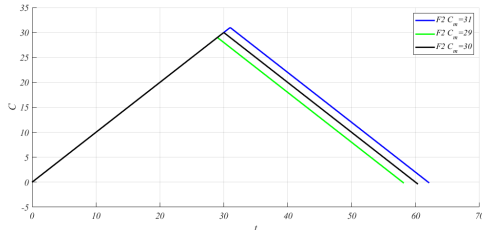


Figure 2: Three loading functions  $C(T) : (C_m, T_m) = (29, 29), (30, 30), (31, 31)$

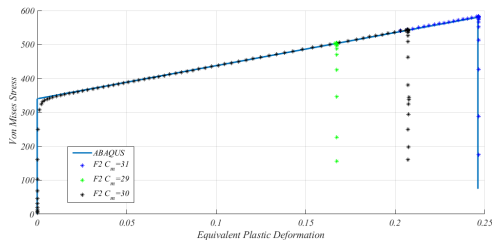


Figure 3: Evolution of the equivalent von-Mises stress with respect to the equivalent strain obtained by the proposed algorithm for the three loading function.

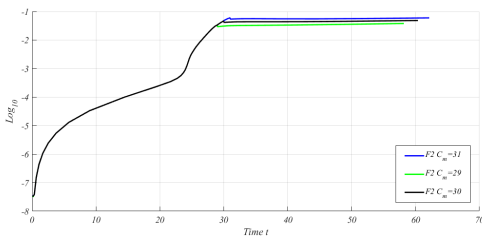


Figure 4: Residual curve: logarithm of the norm of the residual versus time

In figure 5, we have represented the curves of the  $G$  and  $H$  functions defining the regularized elastoplastic behavior law for different values of the regularization parameters. We can thus observe that despite the fact that these curves are far from the initial non-regular curves, the proposed algorithm allows to account for the physics of the problem since the loaded and unloaded zones are automatically calculated. Indeed on figure 6, we can observe for different stages of loading the elastic zones and the plastic

zones for three values of time :  $t = 1.45, t = 19.47, t = 30.99$  and  $t = 61.94$ .

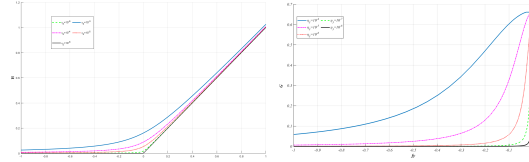


Figure 5: Effect of regularization on the functions  $H$  and  $G$  defining the regularized behavior law in equations (4) and (5).

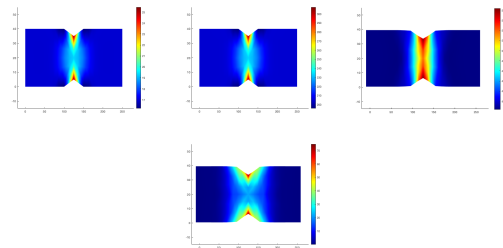


Figure 6: Stress distribution at different stages during the process  $t = 1.45, t = 19.47, t = 30.99$  and  $t = 61.94$

#### 4 Conclusion

In this work a high order algorithm for solving elastoplasticity problems in finite transformation is presented. We have thus evaluated the robustness of the proposed algorithm in an elastic, plastic and elastic-discharge process by studying three loading processes. The quality of the solution, obtained by the proposed high order algorithm, was evaluated by examining the evolution of the residual.

#### References

- [1] J. C. Simo, T. J. R. Hughes, *Computational inelasticity*, Vol. 7, Springer Science & Business Media, 2006.
- [2] M. Assidi, H. Zahrouni, N. Damil, M. Potier-Ferry, *Regularization and perturbation technique to solve plasticity problems*, International Journal of Material Forming, 2009, vol. 2, no 1, p. 1-14.
- [3] C. El Kihal, O. Askour, Y. Belaasilia, B. Braikat, N. Damil, & M. Potier-Ferry, (2022). Asymptotic numerical method for finite plasticity. Finite Elements in Analysis and Design, 206, 103759.
- [4] A. Hamdaoui, B. Braikat, N. Damil. *Solving elastoplasticity problems by the Asymptotic Numerical Method: Influence of the parameterizations*, Finite Elements in Analysis and Design, 2016, vol. 115, p. 33-42.

## Effet de la zone de transition sur la nocivité de défaut dans une canalisation à double pente : Simulation numérique avec XFEM

### Effect of the transition zone on the harmfulness of defect in a pipe with double slope : Numerical simulation with XFEM

H. SALMI<sup>1</sup>, KH. EL HAD<sup>2</sup>, H. EL BHILAT<sup>1</sup>, A. HACHIM<sup>2</sup>

1. Hassan II University of Casablanca (UH2C), National higher school of mechanics, ENSEM, Laboratory of Control and Mechanical Characterization of Materials and Structures, Casablanca, Morocco

2. Institute of Maritims Studies, Laboratory of Materials and Structures  
Casablanca, Morocco

#### Abstract

This work analyzes the effect of the elliptical cracks on a pipe with double slope thickness transition, using the extended finite element method (XFEM), level sets were defined to describe the 3D cracks. Values of stress intensity factors (SIFs) are calculated for different values of thickness transition parameters (thickness ratio and slopes). The results show that parameters of the transition zone have an effect on stress intensity factors, precisely, the parameters of the first thickness transition are more influential on the gravity of defect compared to the second thickness transition.

#### Résumé

Ce travail analyse l'effet des fissures elliptiques sur un tuyau à transition d'épaisseur à double pente, en utilisant la méthode des éléments finis étendus (XFEM), des ensembles de niveaux ont été définis pour décrire les fissures tridimensionnelles. Les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte (SIFs) sont calculées pour différentes valeurs de paramètres de la transition d'épaisseur (rapport d'épaisseur et pentes) Les résultats montrent que les paramètres de la zone de transition ont un effet sur les facteurs d'intensité de contrainte, précisément, les paramètres de la première transition d'épaisseur sont plus influents sur la gravité du défaut par rapport à la deuxième transition d'épaisseur.

**Mots clefs :** *XFEM, tuyau avec transition d'épaisseur à double pente, facteurs d'intensité de contrainte (SIF), fissures tridimensionnelles*

**Keywords :** *XFEM, pipe with double slope thickness transition, stress intensity factors (SIFs), three-dimensional cracks*

#### 1. Introduction

In the field of pressure equipment, cylindrical or spherical structures are often found, those shells can be affected by internal or external cracks[1].

The French Alternative Energies and Atomic Energy Commission (CEA) [2] developed a finite element software Castem for structural and fluid mechanics. CEA [2] used Finite element method (FEM) to investigate straight pipes with circumferential cracks. The field of pressure equipment deals also with thickness transition pipes, these pipes are classified into two types : transitions with a single slope and transitions with a double slope [3] ; Those structures correspond to a connection between two cylinders of the same internal radius but with different thicknesses, those structures are subjected to circumferential cracks at the base of the thickness transition, those defects are modeled as cracks located in a pipe of uniform thickness [3].

The traditional finite element calculations have a cumbersome cost in the modeling of crack, the accuracy of the results in the FEM depends on the mesh refinement, but a fine mesh implies a large number of nodes, so it requires a long time of calculation, hence the introduction of the XFEM to facilitate the solving of crack problems in complex geometries.

In this work, the XFEM is used to analyze the circumferential elliptical cracks in the thickness transition zone. For stationary cracks, the XFEM gives an accurate result, thanks to enrichment function at the crack tip [4].

Using the XFEM to investigate the effect of the crack on a thickness transition with two slopes besides evaluating the influence of transition zone on SIF were

however not treated, also, taking account of internal pressure was required to complete the work in [3]. The purpose of this work is the application of XFEM to investigate the effect of the parameters of the transition zone on SIF.

### 2. Calculation of SIF in XFEM

In XFEM, the standard finite element approximation is locally enriched to discontinuities modeling. At a particular node  $i$ , the displacement approximation is given by Eq. (1) [4]:

$$U(x) = \sum_{n \in N} N_n(x)u_n + \sum_{n \in N_e} N_n(x)(H(x) - H(x_i))a_i + \sum_{n \in N_p} [N_n(x)(\sum_{\alpha=1}^p (\beta_{\alpha}(x) - \beta_{\alpha}(x_i))b_i^{\alpha})] \quad (1)$$

With:

$N_i$ : unknown of the standard finite element (FE) part at node  $i$ .

$N$ : set of all nodes in the domain.

$N_e \subset N$ : nodal subset of the enrichment Heaviside function  $H(x)$ :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \varphi(x) > 0 \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

Where  $\varphi(x)$  is the normal level set function.

$a_i$ : unknown of the enrichment  $H(x)$  at node  $i$ , these nodes are surrounded by a square in Fig.1.

$N_p \subset N$ : nodal subset of the enrichment which is defined for those elements which are partly cut by the crack front, the tip of the crack is described by :

$$\{\beta_{\alpha}(r, \theta)\} = \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \right\} \quad (3)$$

$r = \sqrt{\varphi^2 + \psi^2}$  and  $\theta = \tan^{-1}(\varphi/\psi)$  with  $\varphi$  and  $\psi$  are respectively normal and tangential level sets.

$b_i$ : unknown of the enrichment  $\beta_{\alpha}$  at node  $i$ , these nodes are surrounded by a circle in Fig.1.

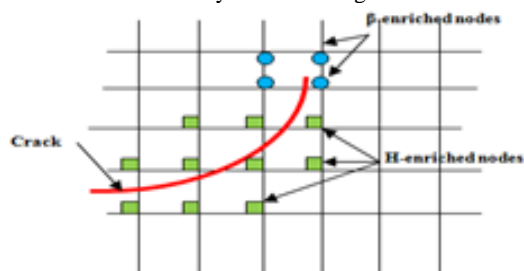


Fig.1 : Strategy of the enrichment in XFEM

Calculation of (SIFs) is performed with the the G- theta of XFEM code in CASTEM [5]. G-theta method calculate the energy release rate  $G$ .  $G$  is expressed in a local basis formed of level set functions (Eqs. 2-3).

### 2.1 Meshing of the cracked pipe

We modeled only a half-pipe with thickness transition and an external elliptical crack (Fig. 2.), we used 3150 XFEM XC8R elements with 512 Gauss points in block

crack. We used 18080 standard elements CUB8 for the rest of the mesh. The thickness transition with two slopes is generally located at the outlet of reservoirs (valves) [3].

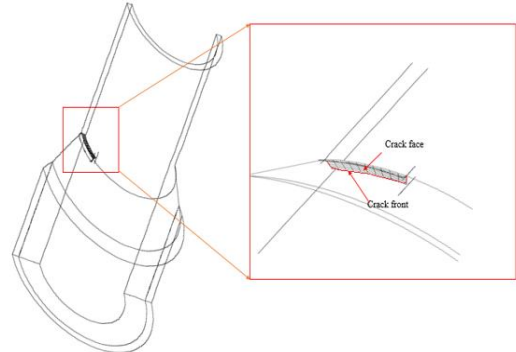


Fig.2. Meshing of the crack

### 2.2 Geometry

The study considered the elastic behavior of the material in P265GH steel (Table 1).

Table 1. properties of P265GH steel.

Young's modulus, E, (MPa)	Yield stress, $\sigma_y$ , (MPa)	Poiss on's ratio, $\nu$	Breaking stress, $\sigma_u$ , (MPa)	Nominal stress, f, (MPa)
200000	320	0.3	470	148

The geometries (Fig.3) of the studied cracked pipes are defined by dimensionless parameters:

- A fraction of thickness  $t$  on the inner radius of the pipe :  $(t_1 / R_i)$ .
- Shape parameter defining elongation of the elliptical crack :  $(a/c)$ .
- The depth of the defect standardized by the thickness of the tube :  $(a / t_1)$ .

In the present work, we model a pipe of average thickness  $(t_1 / R_i = 0.1)$ , the parameter  $(a/c)$  takes values 1, 1/2, 1/4, and 1/8,  $(a / t_1)$  takes values 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8. This gives a set of 20 geometries.

Elliptical cracks are considered to be located at the base of the transition in the thin part of the pipe (Fig.1).

The study considered pipe with thickness transition with double slopes  $(t_1, t_2, t_3, \alpha_1, \alpha_2)$ . Pressurized pipe with thickness transition is a connection between pipe of thickness  $t_1$  assembled to another pipe of a thickness  $t_2$  and  $t_3$   $(t_3 > t_2 > t_1)$ . Pipes are subjected to an internal pressure  $P$ .

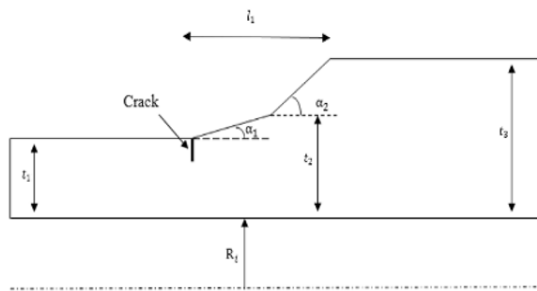


Fig.3. Geometry of different pipe with thickness transition and double slope

### 3. Results and discussion

The position of a point P on the crack front is defined by the angle  $\phi$ ,  $\phi$  takes the value of  $90^\circ$  at the deepest point and  $0^\circ$  at the surface point, those points characterize the semi-elliptical crack ; In general, the evaluation of SIF at those two points is enough to judge the severity of the defect [4].

The French Alternative Energies and Atomic Energy (CEA) [2] studied straight pipes containing external circumferential cracks, CEA [2] calculated the influence factor ( $i_0$ ) in function of stress intensity factor (SIF) using the finite element method (FEM). The verification of the model was made by the comparison of the values  $i_0$  calculated by XFEM in the paper and the results of CEA [4,6].  $i_0$  is calculated at D and S points and along the crack front for all fractions ( $a/t_1$ ) and ( $a/c$ ), comparison between XFEM results and literature [2] is between 0.09% and 0.7% [4,6]. This gives confirmation to use numerical simulation based on XFEM to investigate the SIF at a thickness transition with two slopes in pressurized pipe.

#### 3.1 Effect of the slope in thickness transition on the variation of K (SIF).

We analyze the evolution of K in the thickness transition by fixing two parameters of the transition zone and varying the rest. In this study, we considered elliptic crack defined by  $a/c=0.125$  and  $a/t_1=0.8$ , the pipe is exposed to internal pressure. We present the evolution of K according to ( $\alpha_1$ ) for a fixed value of ( $\alpha_2$ ) in a deepest and surface points (Fig3). Results show that slopes  $\alpha_1 \geq 30^\circ$  and  $\alpha_2 \geq 45^\circ$  present a grave case for thickness transition with a double slope, the angle of the first slope ( $\alpha_1$ ) in thickness transition has more impact on the variations of K than the angle of the second slope ( $\alpha_2$ ).

#### 3.2 Effect of the thickness ratio on the variation of K.

We present the variations of K according to the parameters  $\alpha_2$  and  $t_2/t_1$ , for  $t_3/t_2=1.30$  and

$\alpha_1=20^\circ$  at surface and deepest points (Fig.4). Also we present the variations of K according to the parameters  $\alpha_2$  and  $t_3/t_2$ , for  $t_2/t_1=1.40$  and  $\alpha_1=20^\circ$  at deepest and surface points (Fig.4).

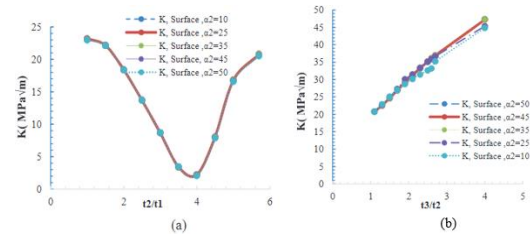


Fig.4 : Variation of K : (a) according to the parameters  $\alpha_2$  and  $t_2/t_1$  (b) according to the parameters  $\alpha_2$  and  $t_3/t_2$

As a result, the parameters of the thickness transition in a pipe have an influence on the variations of K, precisely the parameters of the first thickness transition ( $\alpha_1, t_2/t_1$ ) are more influential on the gravity of defect compared to the second thickness transition ( $\alpha_2, t_3/t_2$ ).

### 4. Conclusion

Considering the internal pressure, this work highlighted the investigation of a 3D crack problem in a thickness transition pipe with double slope, using XFEM. The result showed that the decreasing of the angle of slopes and the increase of the ratio of thickness is one effective method of reducing the SIF.

### Références

- [1] S.Hariri, A. El Hakimi, Z. Azari. Etude numérique et expérimentale de la nocivité des défauts dans des coques cylindriques et sphériques : aide à la détermination des facteurs de contraintes, Revue de Mécanique Appliquée et Théorique, Vol. 1, 10, (2008).
- [2] CEA ; The French Alternative Energies and Atomic Energy Commission (CEA). 'Commissariat à L'Energie Atomique (France)' <http://www.cea.fr/>.
- [3] Abdelkader Saffih, Saïd Hariri. 'Numerical study of elliptical cracks in cylinders with a thickness transition' International Journal of Pressure Vessels and Piping, vol 83, 35–41, (2006).
- [4] Salmi, H., El Had, K., El Bhilat, H., Hachim, A. Numerical analysis of the effect of external circumferential elliptical cracks in transition thickness zone of pressurized pipes using XFEM Journal of Applied and Computational Mechanics, 2019, 5(5), pp. 861–874.
- [5] CASTEM ; <http://www-cast3m.cea.fr/>

## DAMAGE SIMULATION STUDY OF CFRP CARBON FIBER REINFORCED POLYMER REINFORCEMENT

Y. Bounjoum<sup>1</sup>, M. Ait El Fqih<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>Laboratory of Artificial Intelligence & Complex Systems Engineering (AICSE), ENSAM, Hassan II University of Casablanca, Morocco.

\* Corresponding author: [m.aitelfqih@gmail.com](mailto:m.aitelfqih@gmail.com)

### Abstract:

The purpose of this research is to study the influence of reinforcement by composite materials on the resistance of structural elements of concrete and reinforced concrete. The study was conducted on several concrete beams. Indeed, three-point bending tests were performed on rectangular beams and T-section beams reinforced respectively with Carbon Fiber Reinforced Polymer (CFRP) composite materials. This reinforcement contributed to the increase in flexural strength. Simulation study was accomplished. A numerical model of finite element type was developed. This model was run in the Abaqus calculation code keeping the same parameters of the specimens characterized in the laboratory in terms of shape, dimensions and type of loading. The behavior laws obtained by the model confirmed the increase in strength of the specimens studied. The differences between the results obtained can be explained by the absence of a behavioral law characterizing the materials tested and by the assumptions of interactions introduced in the model.

**Keywords:** Concrete, Reinforced concrete, Finite element model, Abaqus, Composite materials, Damage, Mechanical properties.

### 1. Introduction

When a beam is not sufficiently reinforced to resist load, many phenomena takes place such as mixed-mode cracks [1-3]. The results of an experimental investigation on reinforced concrete (RC) T-beams retrofitted in shear with prefabricated L-shaped carbon fiber-reinforced polymer (CFRP) plates were presented by Mofidi et al. [4]. Rena et al. [5] studied one of the most devastating failure models in reinforced concrete structures i.e. the diagonal tension failure. Numerical model was used capable of dealing with both static and dynamic crack propagation.

This work presents a finite-element study by abaqus code simulation of a reinforced concrete by steel fibers subjected to flexion at a point in the middle with 500 kN. This beam rests on two movable supports. In the first one the displacement is fixed along the Y axis ( $U_2 = 0$ ), and in the second, the displacement is fixed along the X axis and the Y axis ( $U_1 = 0$  and  $U_2 = 0$ ). All the mechanical properties of the steel and the concrete used in our simulation are obtained from the data of the literature.

### 2. Simulation

Numerical tests were carried out using the well tested commercial finite element software Abaqus. The finite element method (FEM) is applied widely in the calculation

of structures with reliable results. In general, this partial differential equation relates to an approximation function  $u(x)$  defined on a domain  $j_x(x)$ . It contains boundary conditions to ensure the existence and uniqueness of a solution. In this study, the linear 3D element 4 points of integration (C3D4) are used for the concrete model. The bar element T3D2 is used when it is for the reinforcement of steel. Moreover, the armatures of the numerical model are simplified and present only axial forces.

### 3. Result and Discussion

An experimental study on reinforced concrete (RC) T-section beams refitted in shear with prefabricated L-shaped carbon fiber reinforced polymer (CFRP) plates was carried out by Mofidi et al [4]. All beams tested in this study were labeled with internal transverse steel stirrups spaced at  $s=d/2$ , where  $d=350$  mm is the effective depth of the cross section of the beam. The specimens tested consisted of a T-section beam with a width of 152 mm and a depth of 102 mm. The RC beams had a total length of 2500 mm and a span of 2100 mm. The load was applied at the mid-span of the RC beams. The longitudinal reinforcement at the bottom of the RC beams was laid in two layers of four 25M bars (diameter 25.2 mm, section 500 mm<sup>2</sup>). At the top of the cross section, the longitudinal steel reinforcement consisted of six bars of 10M laid in a single layer (diameter 10.3 mm, section 100 mm<sup>2</sup>). The transverse reinforcement had a diameter of 8 mm (section of 50 mm<sup>2</sup>). The spacing between the steel stirrups was 175 mm ( $d/2$ ) for all specimens with internal transverse steel (Fig. 1).

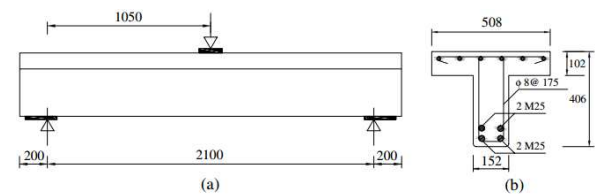


Figure 1: Details of RC section tee beam (experimental test):  
(a) Elevation; (b) Cross-section [4]

The RC beams have been tested in three-point bending. The results of the experimental test are presented in (Table 1).

Specimen	Breaking load in (kN)	Deflection at point of load in (mm)
SI-CON	432.4	11.9

Table 1: Experimental results of the test [4]

We have implemented a finite element model to study the behavior in bending of reinforced concrete T-section beams



recently tested and reinforced by a sheet of CFRP glued to the lower base of the beam. At that time we first validated our finite element model with the experiment of Mofidi et al [4]. A numerical analysis was performed and the load-deflection term results were recorded in order to compare our numerical results with that of the experiment see (Fig. 2).

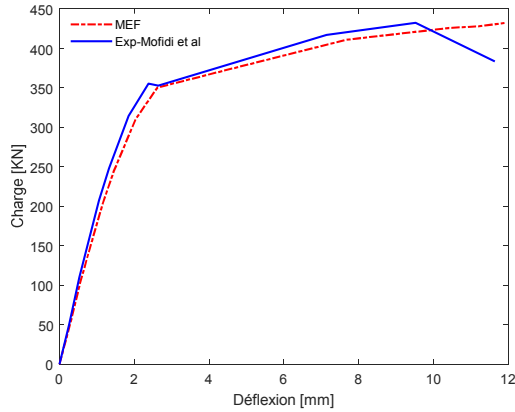


Figure 2: Validation of results between the experimental model and the model developed by EF

The figure 2 clearly shows that the expected load and deflection of the transmission element, the results are in good agreement with the experimental data measured at all stages of loading. Furthermore, the figure shows that the difference in results between the experimental data and the numerical results are less than 10%, indicating that the developed FE models are valid, and could be used as a valid tool to predict the response. The developed FE model could also be used in design-oriented parametric studies to examine the effect of several parameters on the performance of externally reinforced RC beams.

Two reinforced concrete beams were cast using normal aggregate concrete with a compressive strength of 30 MPa. These beams were of T section and had a length of 2800 mm. steel composed of two 12 mm diameter bars in the tension zone and four 8 mm diameter bars in the compression zone of the gross section of the beam. These beams were also reinforced with 10 mm stirrups, spaced with an interval of 100 mm to ensure failure in bending of control beam (T0-Ref) and reinforced beam (T-PRFC). All bars had a clear cover of 10 mm. An RC beam reinforced with a sheet of EB-CFRP (External Bonding of Carbon Fiber Reinforced Polymer) is therefore used in this study, as well as an unreinforced RC control beam. A full description and designation specimens tested are provided in (Table 2). The CFRP sheet was glued along the entire length of the beam, along its longitudinal axis, using an epoxy adhesive. (Fig. 3) shows a general elevation view of the control RC beam and the beam reinforced with EB-CFRP, together with details of their cross-section, respectively.

Beam	Designation	FRP type	FRP Thickness
Unreinforced beam	T <sub>0</sub> -Ref	N/A	N/A
CFRP reinforced beam	T-PRFC	PRFC	1mm

Table 2: Description of the T section beams modeled

he boundary conditions are taken as that of the rectangular beam modulus studied in part (3.1)

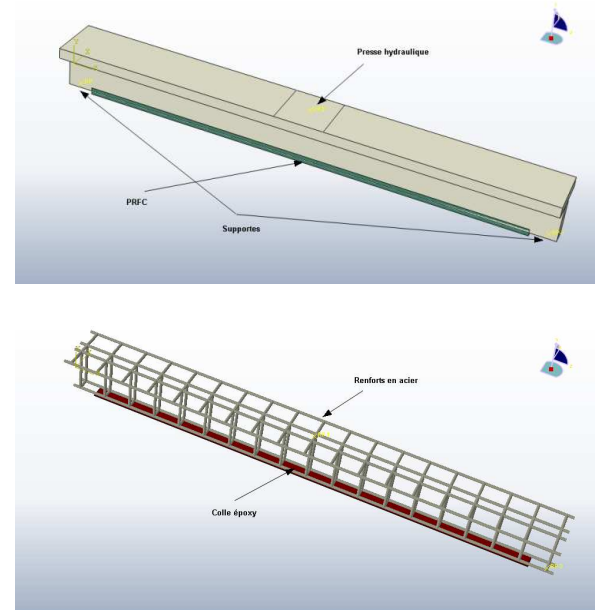
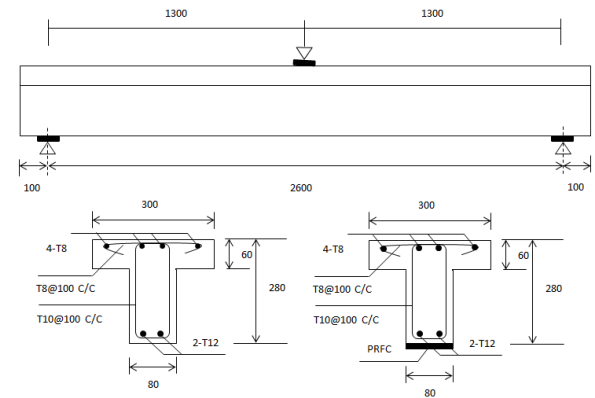


Figure 3: Geometric details of RC section T beams modeled

The loading point in the test is a 300 mm wide metal plate to eliminate the stress concentration of the concrete in the loading area. The load is controlled by the imposed displacement with a speed of 1mm/min. In the numerical model, the load is modeled by an imposed displacement in the zone occupied by the plate which corresponds to the

real position of the load (Fig. 4). For Abaqus /Explicit the acceleration of the loading speed is used to reduce the computation time, this change will cause the dynamic effect in the model because the real time for a physical process (called natural time) in general it is obvious that a computational analysis in natural time for a quasi-static process will produce the most accurate static results. To save computational time and computational cost, the charging speed can be increased, so that the same physical event occurs in less time, and the approximate solution remains the same as the computed solution in natural time. The reinforcements are bonded with the concrete by perfect bond (Fig. 4). In the perfect connection, it is considered that there is no displacement between the reinforcement nodes and the nearest concrete nodes.

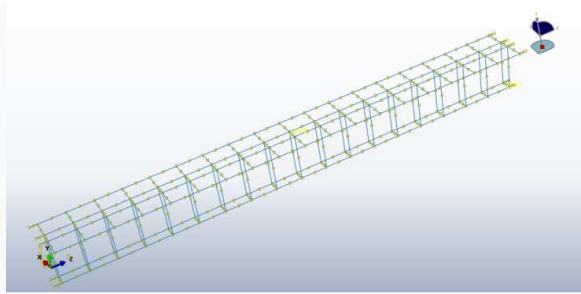


Figure 4: Perfect connection (Embedded region) of rebar in the digital model

Response curves of predicted load versus displacement at mid-span for the T0-Ref and T-PRFC beam models are shown in (Fig. 5 and 6).

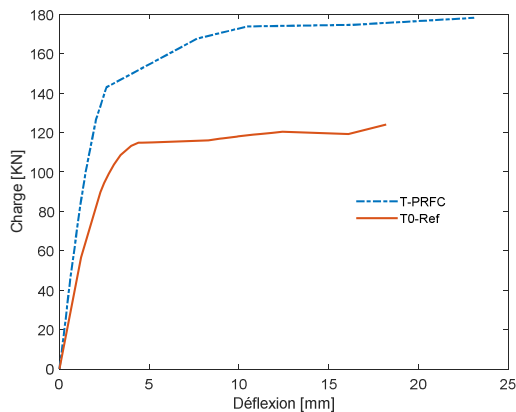


Figure 5: Load curves according to the deflection of the T-beams (T0-Ref and T-PRFC)

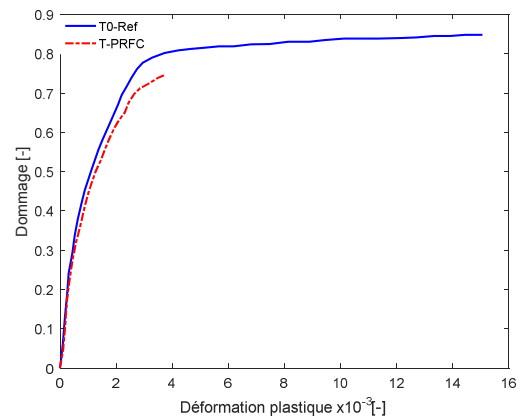


Figure 6: Curves Tensile damage as a function of the magnitude of plastic deformations of T-beams (T0-Ref and T-PRFC)

#### 4. Conclusion

As for the T section beams, the validation of the finite element models has been made, based on the results of the experiment previously carried out by the team of research that we previously cited in the last chapter. This model is then used to study the bending performance of non-reinforced concrete beams reinforced and reinforced by the CFRP sheets bonded to the bottom surface of the beam (EB-CFRP). Through the results obtained numerically, one notes a 45% increase in stiffness and load capacity of the reinforced beam compared to the unreinforced one. However, and at the same time, a decrease in the ductility of the beam was observed.

#### References

- [1] K. Essaadaoui, M. Ait El Fqih, M. Idiri, B. Boubeker, Numerical Study on Reinforced Concrete Beams by Honeycomb Sandwich Panel Structures, International Journal of Applied Engineering Research, Volume 14, Number 18 (2019) pp. 3685-3688.
- [2] K. Essaadaoui, M. Ait El Fqih, M. Idiri, B. Boubeker, Numerical Study of Damaged, Failure and Cracking of Concrete Beam Reinforced by Honeycomb Sandwich Panel Structures, Communications in Computer and Information Science, vol 1207, Springer, Cham, (2020) pp 316-325.
- [3] K. Essaadaoui, M. Ait El Fqih, M. Idiri, B. Boubeker, Experimental investigation on reinforced concrete beams by honeycomb sandwich panel structures: Mechanical properties study, IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2020, 948(1), 012027.
- [4] A. Mofidi, S. Thivierge, O. Chaallal, Y. Shao. Behavior of reinforced concrete beams strengthened in shear using l-shaped cfrp plates : Experimental investigation. Journal of composites for construction, 18(2) :04013033, 2014.
- [5] R. Y. Rena, L. Saucedo, G. Ruiz, Finite-element study of the diagonal-tension failure in reinforced concrete beams, Int J Fract, 169 (2011) 169–182.

## Analysis of the effect of elastic joints on the dynamic behavior of a bolted structure

M. HAIEK<sup>1,\*</sup>, Y. LAKHAL<sup>2</sup>, N. BEN SAID AMRANI<sup>1</sup>, Y. EL ANSARI<sup>3</sup>, D. SARSRI<sup>1</sup>

1. Laboratory of Innovative Technologies, National School of Applied Sciences of Tangier. B.P. 1818, Tangier, Morocco.

2. High School of Technology, Sultan Moulay Slimane University. B.P. 591, Beni Mellal, Morocco.

3. High School of Technology, Ibn Zohr University. B.P. 80150, Agadir, Morocco.

\*. Mohammed.haiek1@etu.uae.ac.ma

### Abstract

This paper represents an analysis of the effect of an elastic joint on the dynamic behavior of a bolted connection of two plates under the action of mechanical loads. Primarily, we have represented the studied structure and the numerical calculation approach to perform well-approximated simulations of the dynamic behavior of the proposed structure. Secondly, the results of these numerical simulations are plotted as a function of the variation in the various inputs. And finally, to achieve the objective of this work, an analysis of the variation of stress and strain as a function of the mechanical actions applied to the two structures (without and with the joint) is carried out to determine the effect of the joint on the distribution of these two parameters of output.

**Keywords:** *Dynamic analysis, Finite element simulation, Bolted mechanical structure, Stress Von Mises, Strain, Bending test.*

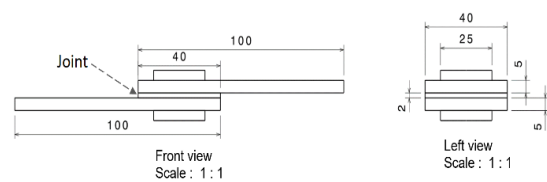
### 1. Introduction

The Bolted structures are extensively used in many areas of mechanical and industrial engineering, as they provide good rigidity and security for the assembly of parts. The bolted structure described in [1] will be exploited to study its dynamic behavior under external mechanical actions. In this context, several studies have analyzed the behavior of these structures after the application of mechanical actions, considering the influence of these actions on the assembly elements to verify their safety and stiffness. In the literature, several studies deal with the mechanical characteristics of the bolted structure and its static, dynamic, and frequency behavior as a function of input data. Our original contribution to this paper is to analyze the influence of the existence of an elastic joint on the dynamic behavior of a bolted mechanical structure that is under the effect of a Pressure Force, and the results of the numerical simulation are interpreted (the outputs) according to the variation of the inputs.

### 2. Experiment with numerical simulation and data

#### 2.1 Description of the studied structure

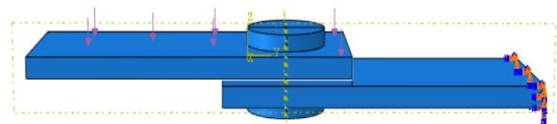
In practice, bolted structures are usually subjected to simple compound mechanical actions. In our case, we use the FE model of [1] Figure 1 to experiment with numerical simulations. The bolted structure under study is subjected to bending stress. Figure 1 shows all the parameters used. These parameters, which are related to the geometrical parameters of the structure, are the thickness of the elastic part, the width, the length of the two plates, as well as the diameter of the hole from the middle to the contact area.



**Figure 1:** The overall drawing of the studied structure with Joint

#### 2.2 Description of the studied structure

First, we subdivide the geometry of the studied structure into elements with equivalent behavior to simplify the mesh of its finite element (FE) model. The simulations are carried out using the ABAQUS software. It is also used to simulate the behavior of parts or structures involving polymers or elastomeric elements: considering non-linearities, large deformations, and coupling with temperature effects. It is thus possible to carry out static or dynamic analyses, for example for sealing problems, vibration analyses, etc. The definition of the studied structure is shown in Figure 2.



**Figure 2:** Numerical experiment of bolted structure bending test

The material properties of the different parts of the structure have been chosen according to the type of material. For all simulations, the two plates and the bolt are made of steel and the material of the joint is chosen from the 4 types of materials listed in Table 1. All the information about the material properties of all the parts is also presented in table 1.

**Table 1:** Material properties of the structure components

	Young Modulus E(MPa)	Poisson ratio	Density (T/mm <sup>2</sup> )
Steel plate & Bolt	210e <sup>3</sup>	0.3	7.8e <sup>-9</sup>
Joint Butyl Rubber	6	0.49	1.5e <sup>-9</sup>
Joint Silicone Elastomer	50	0.49	1.22e <sup>-9</sup>

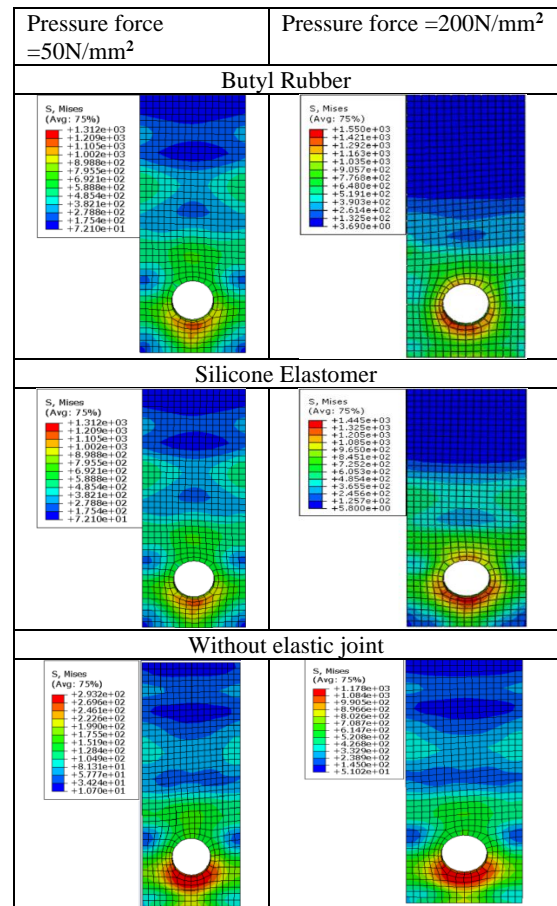
In this simulation, bending loads of different values ranging from 50 N/mm<sup>2</sup> to 200 N/mm<sup>2</sup> were applied to the top face of the top plate (see Figure 2), and the joint material was modified to study the dynamic response of the structure. To achieve the objective of this analysis, the previous mechanical actions are applied to the bolted structure without elastic joints to compare the results of the two simulations.

**3. Results in Finite Element simulation**

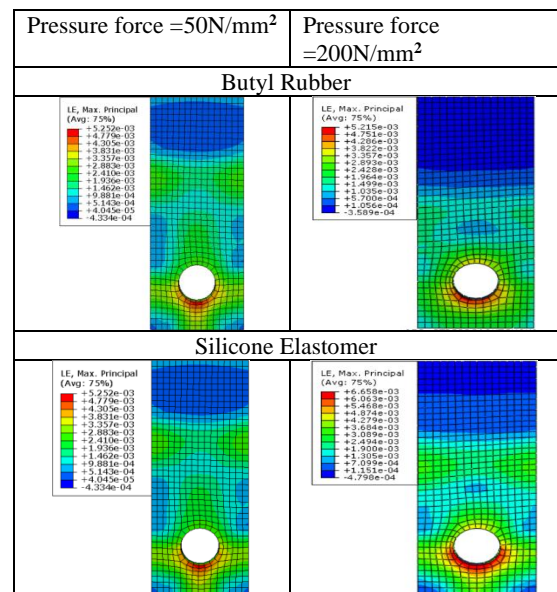
Finite element analysis (FEA) is considered a good replacement for real experiments. It provides faster and cheaper results to explain physical experiments. Reliable test data are essential to simulate a FE model and obtain results similar to those of real experimentation. If the FEA is validated, it is possible to model the dynamic response of the structure by evaluating several input parameters and their effects on the output parameters.

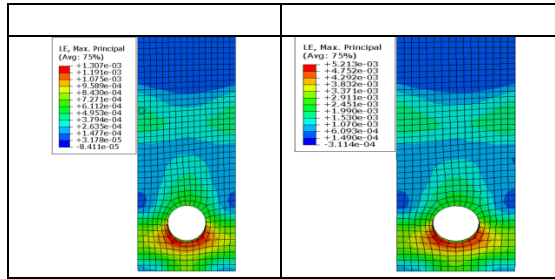
The results to be discussed are to analyze the dynamic behavior of the structure without a joint and the structure with an elastic joint thickness of 2 mm. For each structure, the mechanical actions of values 50N/mm<sup>2</sup>, 75N/mm<sup>2</sup>, 100N/mm<sup>2</sup>, 125N/mm<sup>2</sup>, 150N/mm<sup>2</sup>, 175N/mm<sup>2</sup>, and 200N/mm<sup>2</sup> are applied one after another. The output data are extracted after each application of mechanical action. When we finish the application of all the mechanical actions on the structure with a joint using the first chosen material, we move on to the other chosen materials and we carry out the same procedure applied to the structure studied in the case of using the first material. Table 2 shows an example of the results of the numerical simulation in terms of the Von Mises stress distribution on the bottom plate for the applied force of 200N/mm<sup>2</sup>. In the same vein, the following table presents an example of the results of the simulations in terms of the strain distribution in the lower plate for an external force of 200N/mm<sup>2</sup>.

**Table 2:** Stress distribution on the lower plate: Comparison between the application of actions of values of 50 N/mm<sup>2</sup> and other actions of values and 200N/mm<sup>2</sup>



**Table 3:** Strain distribution on the lower plate: Comparison between the application of actions of values of 50 N/mm<sup>2</sup> and other actions of values and 200N/mm<sup>2</sup>

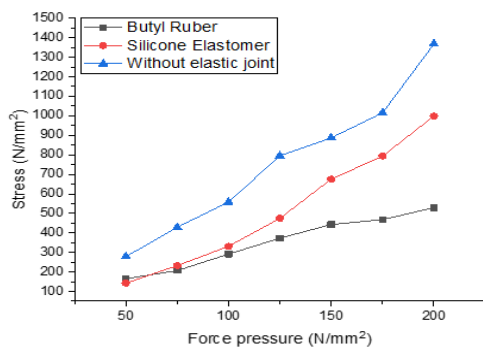




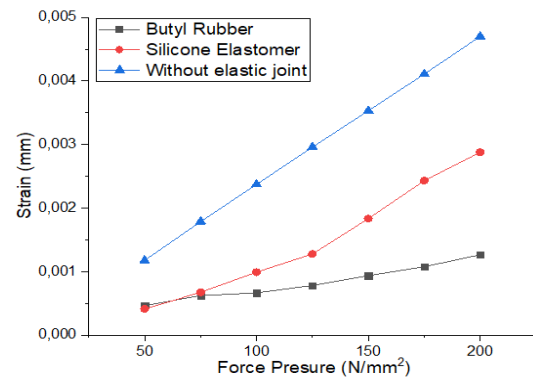
The simulation results presented in Table 2 show that the Von-Mises stress distribution on the bottom plate is concentrated in the joint area next to the hole. These results also show that the value of stresses increases when there is an increase in the mechanical actions exerted regardless of the nature of the joint material for the jointed structure. The simulations reveal the same previous results for the jointless structure with a zone of maximum concentration is remarkable compared to the jointed structure, this is justified by the absorption of stresses transferred between the parts of the structure by the elastic joint.

Table 3 shows that the elements of the lower plate near the hole are the most deformed, and according to the simulations carried out the value of their deformation increases when there is also an increase in the mechanical actions exerted on the structure for all the materials of the plate. For the structure without joint, the same previous results are found with more deformed elements, which is justified by the absorption of the forces transferred between the parts by the elastic joint.

To differentiate between the simulation results, the second analysis is developed by choosing an element of the lower plate in the assembly zone where the stress and strain distribution is maximum. Figure 3 represents the distribution of the stresses according to the actions applied in this element chosen for the 3 structures. In the same vein, Figure 4 represents the distribution of the stresses according to the actions applied in the same element.



**Figure 3:** Distribution of the stresses according to the actions applied



**Figure 4:** Distribution of the strain according to the actions applied

As it is shown in figure 3 and 4, the stress and strain distribution for all structures increases when there is an increase in the value of the external pressure forces. In the same direction of analysis, for each value of pressure force, the value of stress and deformation of the structure without a joint is important compared to that of the structures with joint, this explains the role of absorption of the distribution of stress and deformation by the elastic joint. The difference observed between the results of analysis for the two structures with the joint is caused by the difference in mechanical characteristics of the joint.

#### 4. Conclusion

In this paper, an experimental numerical simulation was carried out to study the evolution of the Von Mises stress and strain in a bolted structure in the presence of an elastic Joint in the joining area. The experiment consists in changing the input data (Mechanical actions, material of the joint), in order to study their actions on the evolution of the output data (Von Mises stress and strain). The results obtained are varied, firstly, the stress and strain are concentrated in the joint area near the hole. secondly, the joint allows for less stress and strain distribution compared to the structure without a joint. this explains the distribution absorption role performed by the joint.

#### Références

- [1] Haiek M, El Ansari Y, Amrani Ben Said N, Sarsri D, *A Stochastic Model of Stress Evolution in a Bolted Structure in the Presence of a Joint Elastic Piece: Modeling and Parameter Inference*, Advances in Materials Science and Engineering (2020), <https://doi.org/10.1155/2020/9601212>
- [2] Parroissien E, *Contribution to the Hybrid (bolted/bonded) Joining - Application to Aeronautical Joints*, Thèse 2006, Toulouse University III
- [3] Haiek M, Sarsri D, *Analyse du comportement d'une structure assemblée boulonnée non-linéaire*, SMSM, Cmm2019, Rabat, MAroc, 2019.

# Numerical Simulation of the Mechanical Behavior of Two Polymers (High Impact Polystyrene (HIPS) and High-Density Polyethylene (HDPE)) During Flexural Test

M. BAHA<sup>1</sup>, R. ELKORI<sup>2</sup>, A. LAMARTI<sup>3</sup>, S. OUHIMMOU<sup>1</sup>, A. HACHIM<sup>2,3</sup>, R. SEHAQUI<sup>1</sup>

1. University of Hassan II, Faculty of Sciences Ain-Chock, FSAC, Laboratory of Mechanics, Casablanca, Morocco.  
baha.meryem1@gmail.com

2. University of Hassan II, National higher school of mechanics, ENSEM, Laboratory of Control and Mechanical Characterization of Materials and Structures, Casablanca, Morocco.

3. University of Hassan II, Higher Institute of Maritime Studies, ISEM, Laboratory of Control and Mechanical Characterization of Materials and Structures, Casablanca, Morocco.

## Abstract

In our study we are interested in the numerical characterization of the mechanical behavior of two types of thermoplastic polymers (High Impact Polystyrene and High-Density Polyethylene), by using a commercially available numerical simulation software based on the finite element simulation.

Our objective is to compare between the results of the numerical simulation during a three-point bending test.

**Keywords:** *Bending, Polystyrene, modeling, Polyethylene.*

## 1. Introduction

Organic or polymer materials constitute one of the three main classes of materials along with metallic materials and ceramics [1]. The demand for these materials has increased in recent years, given their wide use in various fields (Packaging, Building and Construction, Automotive, Medical ...) [1]–[3].

In general, polymers are divided into three main families, thermosets, elastomers and thermoplastics [4] to which our samples belong: High Impact Polystyrene (HIPS) and High-Density Polyethylene (HDPE), which is considered as a model material for the scientific study of the mechanical behavior of polymers of the same class. The latter has been the subject of a numerical study by Benguediab et al [5], who performed a numerical simulation of three-point bending in two dimensions and for two types of specimens. While the experimental study of the mechanical behavior in three-point bending of high-impact polystyrene attracted the attention of El Bhilat et al. [6] who took into account the effect of the recycling process and the number of processing cycles on the mechanical properties of the studied material. ELkori et al. [7] has studied the effect of U and V notch on the mechanical properties of High-Density Polyethylene, and compare the properties of un-notched samples HDPE [8] to those of HIPS realized by elbhilat [9].

The goal of this study is to numerically model and compare the mechanical behavior of two types of polymers during a bending test.

## 2. Materials and Methodology

### 2.1 Materials properties

The study consists in carrying out a numerical modelling of the three-point bending test, using a commercially available numerical simulation software, for two types of polymers of the same family of thermoplastics and of different intermolecular structure, whose mechanical properties are shown in the following table:

Material	Nature	Young's Modulus (MPa)	Poisson's ratio	Density (g/cm <sup>3</sup> )
HDPE	Semi-crystallin	1153	0.4	0.995
HIPS	Amorphous	240	0.35	1.04

Tab.1. Mechanical properties of materials

The parameters presented in the table 1 are results of experimental studies carried out by Elbhilat [9] and Elkori [7].

Based on the mechanical properties, cited in Table 1, we notice that the Young's modulus of high-impact polystyrene is lower than that of high-density polyethylene, which implies that the latter is the most rigid in our case.

### 2.2 Numerical simulation

To carry out this numerical study, we considered rectangular specimens, of dimensions quoted in figure 1.

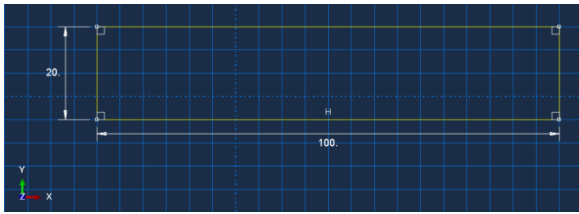


Fig. 1. Sample size

In order to be able to compare the results of the two materials, we have chosen the same type of mesh for both samples. The next Figures represent the meshed samples of the specimen. The mesh type is : C3D8R, with a dimension of 0.5mm.

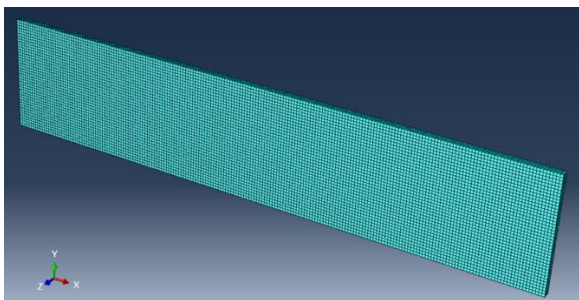


Fig. 2. Meshed sample

Figure 3 shows the numerical model of a three-point bending test. The test was carried out under conditions of imposed displacement and at room temperature.

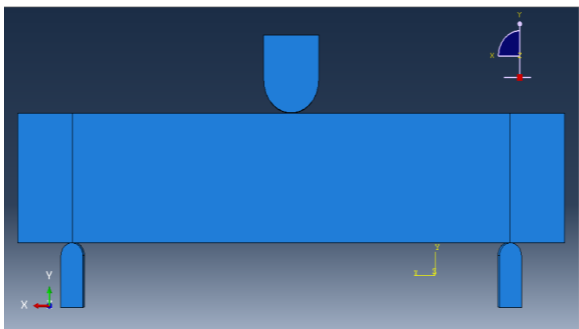


Fig. 3. Modeling of a three-point bending test

### 3. Results and discussion

The figure 4 represents the numerical results of the three points bending test of HDPE, while the figure 5 represents the numerical results of HIPS.

Both curves have the same mechanical behavior characterized with a linear variation of the flexural stress called elastic zone, and a non-linear zone represents plastic zone. The latter characterized in the case of HDPE material by a rapid drop in stress and then plastic stabilization while the HIPS shows a decrease then slow increase of the stress.

The flexural strength for HIPS attends a value of 2,6 MPa, while the study carried Awad et al. [10] shows a flexural strength of 24 MPa.

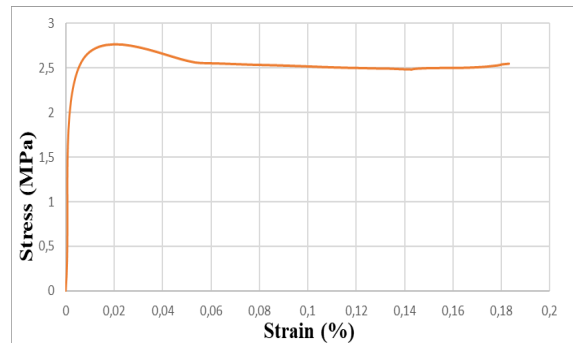


Fig. 4. Numerical Stress-strain curve of HDPE in a bending test

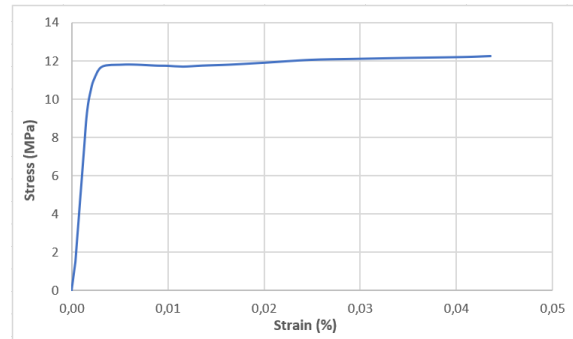


Fig. 5. Numerical Stress-strain curve of HIPS in a bending test

In order to compare the two materials, we have grouped the two stress-strain curves of HDPE and HIPS in Figure 6.

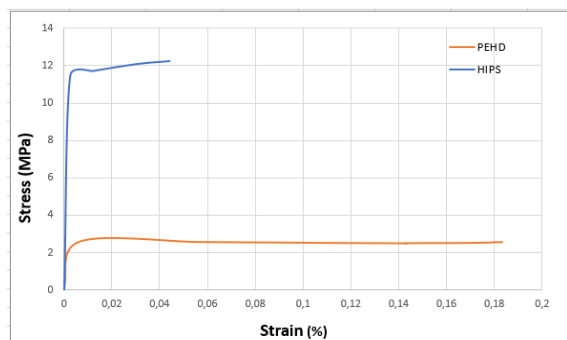


Fig. 6. Comparison between the stress-strain curves of HIPS and HDPE.

Figure 6 shows that there is a large difference between the mechanical properties of the two materials in a three-point bending test. The elastic zone of High Impact Polystyrene (HIPS) is greater than that of High-Density Polyethylene (HDPE), while the plastic zone of the latter is the largest, this shows that HDPE has a higher bending strength than HIPS.

In the HDPE curve, the plastic zone is characterized by stress stabilization, while the plastic zone of HIPS is characterized by a slow increase in stress as a function of deformation (hardening)

#### 4. Conclusion

The objective of this study is to compare the mechanical behavior of high-impact polystyrene and high-density polyethylene based on stress-strain curves. First, we performed a numerical simulation, using commercially available simulation software, of a three-point bending test of the two thermoplastic polymers in order to compare their stress-strain curves. The results obtained show that both materials have a ductile behavior, and that HDPE is the most resistant in our case.

#### References

- [1] R. J. Young and P. A. Lovell, *Introduction to Polymers*. 2020.
- [2] “Farming : Distribution .;,” *RSC Adv. Chem. Sci.*
- [3] “1 . Classification of materials .;,” pp. 1–10.
- [4] R. J. Young and P. A. Lovell, *Introduction to Polymers*, 3rd ed. 2011.
- [5] M. BENGUEDIAB, B. B. BOUIADJRA, and M. ELMEGUENNI, “Modélisation par éléments finis du comportement d’un polymère semi- cristallin : Polyéthylène à haute densité,” in *9ème Congrès de Mécanique*, 2009, no. figure 2, pp. 10–12.
- [6] H. El Bhilat, K. El Had, H. Salmi, and A. Hachim, “Thermo-mechanical characterization of post-consumer recycled high impact polystyrene from disposable cups : influence of the number of processing cycles .;,” *J. Comput. Appl. Res. Mech. Eng.*, vol. 10, no. 2, pp. 427–436, 2021, doi: 10.22061/JCARME.2019.5187.1643.
- [7] E. Rabiaa, L. Amal, E. Khalid, and H. Abdelilah, “Numerical and experimental study of the Behaviour of notched,” *E3S Web Conf.*, vol. 229, 2021, doi: 10.1051/e3sconf/202122901002.
- [8] R. Elkori, M. Baha, A. Hachim, K. Elhad, and A. Lamarti, “Comparison of the mechanical Behaviour of thermo- plastic polymers : High-density polyethylene and high- impact polystyrene,” in *The 4th International Conference on Networking, Information Systems & Security*, 2021, pp. 1–12, doi: 10.1145/3454127.3456569.
- [9] H. El Bhilat, A. Hachim, and K. El Had, “Caractérisation du comportement HIPS sous tension uni axiale et modélisation de la loi de comportement thermomécanique du module de Young dans le domaine élastique .;,” 2018.
- [10] A. Hassan Awad, R. El Gamasy, A. Abd El Wahab, and M. Hazem Abdellatif, “Mechanical and Physical Properties of PP and HDPE,” *Eng. Sci.*, vol. 4, no. 2, p. 34, 2019, doi: 10.11648/j.es.20190402.12.



## Modélisation du comportement dynamique des poutres stratifiées piézoélectriques par le pseudo formalisme de Stroh

H. Balkissou<sup>1,2</sup>, F.P. Ewolo Ngak<sup>1</sup>, G.E. Ntamack<sup>1</sup>, L. Azrar<sup>3,4</sup>

<sup>1</sup>Groupe de Mécanique, Matériaux et Acoustique, B.P. 454, Département de Physique, Faculté des Sciences, Université de Ngaoundéré, Cameroun

<sup>2</sup>Comité National de Développement des Technologies, MINRESI, P. O. Box 1457, Yaoundé, Cameroun

<sup>3</sup>Research Center STIS, Team M2CS, Department of Applied Mathematics and Informatics, ENSAM, Mohammed V University in Rabat, Morocco

<sup>4</sup>Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, King Abdulaziz University, Jeddah, Saudi Arabia  
[balkishamidou4@gmail.com](mailto:balkishamidou4@gmail.com), [ewolongak@gmail.com](mailto:ewolongak@gmail.com), [guvedgar@yahoo.fr](mailto:guvedgar@yahoo.fr), [lazrar@um5s.net.ma](mailto:lazrar@um5s.net.ma)

**Résumé:** Dans ce travail, un modèle semi-analytique est proposé pour l'étude du comportement dynamique des poutres stratifiées piézoélectriques simplement appuyées. A cet effet, le pseudo-formalisme de Stroh couplé aux polynômes de Lagrange et à la méthode de la matrice de propagation est utilisé. La méthodologie ainsi élaboré permet d'étudier l'influence de la séquence d'empilement sur la réponse dynamique des poutres stratifiées piézoélectriques.

**Mots clés:** Pseudo-formalisme de Stroh, stratifiés, piézoélectriques, matrice de propagation.

### 1. Introduction

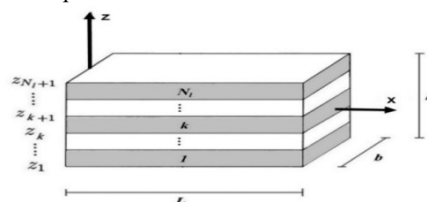
Les structures stratifiées multifonctionnelles notamment les poutres piézoélectriques sont des structures intelligentes qui ce sont de plus en plus développées ces dernières décennies dans les domaines de technologies de pointes tels que l'aéronautique, l'aérospatial, l'industrie navale, l'imagerie médicale, l'industrie immobilière (les immeubles intelligents). Elles contribuent non seulement à l'évolution sociale des pays mais également à leur culture et leur évolution. Les objectifs de recherche en matière de nouveaux matériaux sont : gain de performances, baisse du coût de fabrication des produits, et sauvegarde ou même amélioration de la fiabilité. De nombreux travaux ont été effectués dans la littérature sur les structures stratifiées multifonctionnelles. Ajdour et Azrar [1] ont étudiés le comportement statique des plaques orthotropes à couches piézoélectriques et simplement supportées en utilisant le pseudo-formalisme de Stroh. Pan [2] et Heyliger et Pan [3] étudient respectivement le comportement statique et les flexions cylindriques des plaques magnéto-électro-élastiques simplement appuyées. Ewolo et al. [4] ont effectué une analyse dynamique des plaques stratifiées magnéto-électro-élastiques par le pseudo-formalisme de Stroh couplé à la méthode d'interpolation de Lagrange. Yan et Chen [5] et Yan et al. [6] démontrent l'impact des effets d'interfaces sur les propriétés électromécaniques des poutres stratifiées à couches piézoélectriques et à fonctionnalités graduées.

Dans ce travail, la modélisation du comportement dynamique des poutres stratifiées piézoélectriques simplement supportées par le pseudo-formalisme de Stroh couplé aux polynômes de Lagrange et à la méthode de la matrice de propagation est présentée.

### 2. Modélisation mathématique

#### 2.1. Equations constitutives

Considérons une poutre multicouche piézoélectrique de longueur  $L$ , d'épaisseur  $h$  et de largeur  $b$ . La  $k^{\text{ème}}$  couche de la poutre est délimitée par son interface inférieure  $z_{k-1}$  et son interface supérieure  $z_k$  de hauteur  $h_k = z_k - z_{k-1}$  ( $k = 1, \dots, N$ ) comme le montre la figure 1;  $N$  étant le nombre total de couche de la poutre.



**Figure 1 :** poutre multicouche piézoélectrique

Les lois de comportement des matériaux piézoélectriques sont données par :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{lij} E_l \\ D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \chi_{il} E_l \end{cases} \quad (1)$$

Où  $D_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du déplacement électrique ;  $E_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du champ électrique ;  $\sigma_{ij}$  et  $\varepsilon_{kl}$  sont respectivement les composantes des tenseurs de contrainte et de déformation ;  $C_{ijkl}$ ,  $e_{lij}$  et  $\chi_{il}$  étant respectivement les composantes des tenseurs de rigidité, piézoélectrique et diélectriques ( $i, j, k, l = 1, 2, 3$ ).

Considérons une poutre d'axe longitudinal  $x$  élastique et d'axe transversal  $z$ . On suppose que  $\sigma_{yy} = \tau_{yz} = \tau_{xy} = D_y = E_y = 0$ . La loi de comportement se réduit à :

$$\begin{cases} \vec{\sigma} = [\bar{C}] \vec{\varepsilon} - [\bar{e}] \vec{E} \\ \vec{D} = [\bar{e}]^T \vec{\varepsilon} + [\bar{\chi}] \vec{E} \end{cases} ; \begin{cases} \vec{\sigma} = (\sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \tau_{xz})^T ; \vec{D} = (D_x, D_z)^T \\ \vec{\varepsilon} = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xz})^T ; \vec{E} = (E_x, E_z)^T \end{cases} \quad (2)$$

$$[\bar{C}] = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{33} \end{bmatrix} ; [\bar{e}] = \begin{bmatrix} 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & \bar{e}_{33} \\ \bar{e}_{15} & 0 \end{bmatrix} ; [\bar{\chi}] = \begin{bmatrix} \bar{\chi}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{\chi}_{33} \end{bmatrix}$$

Les déformations et le champ électrique sont respectivement liés aux déplacements et au potentiel électrique par les relations suivantes :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ et } E_i = -\phi_{,i} \quad (3)$$

Les équations de mouvement de la mécanique des milieux continus en absence des forces de volume et l'équation de l'électromagnétisme de Maxwell-Gauss sont données par :

$$\sigma_{ij,j} = \rho^{(k)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \text{ et } D_{i,i} = 0 \quad (4)$$

## 2.2. Pseudo-formalisme de Stroh

Pour une poutre simplement supportée, les conditions aux limites sont données par :

$$u_z = \phi = \sigma_{xx} = \sigma_{zz} = 0 \text{ en } x = 0 \text{ et } x = L \quad (5)$$

Les solutions de Stroh (champs cinématiquement admissibles) vérifiant les conditions aux limites (5) sont données par :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_z \\ \phi \end{bmatrix} = e^{sz} \begin{bmatrix} a_1(t) \cos(px) \\ a_2(t) \sin(px) \\ a_3(t) \sin(px) \end{bmatrix} ; \begin{cases} p = \frac{m\pi}{L} \\ 0 \leq x \leq L \\ z_{k-1} \leq z \leq z_k \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \sigma_{zz} \\ D_z \end{bmatrix} = e^{sz} \begin{bmatrix} b_1(t) \cos(px) \\ b_2(t) \sin(px) \\ b_3(t) \sin(px) \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

$$\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ D_x \end{bmatrix} = e^{sz} \begin{bmatrix} c_1(t) \sin(px) \\ c_2(t) \cos(px) \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

En remplaçant les relations (6) dans les équations (2), (3) et (4), nous obtenons les équations suivantes :

$$[\mathbf{Q} + s(\mathbf{R} - \mathbf{R}^T) + s^2\mathbf{T}]\mathbf{a}(t) = \rho^{(k)}\mathbf{J} \frac{d^2\mathbf{a}(t)}{dt^2} \quad (7.1)$$

$$\mathbf{b}(t) = [s\mathbf{T} - \mathbf{R}^T]\mathbf{a}(t) \quad (7.2)$$

$$\mathbf{c}(t) = [\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^T \quad \mathbf{M}_2\mathbf{T}^{-1}] \begin{bmatrix} \mathbf{a}(t) \\ \mathbf{b}(t) \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

$\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{T}, \mathbf{J}, \mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{M}_2$  étant des matrices qui dépendent des caractéristiques avec :

$$\mathbf{a}(t) = (a_1, a_2, a_3)^T; \mathbf{b}(t) = (b_1, b_2, b_3)^T; \mathbf{c}(t) = (c_1, c_2)^T$$

### - Matrice fondamentale de Stroh

En combinant les équations (7.1) et (7.2), on a :

$$\rho^{(k)}\mathbf{\Omega} \frac{d^2\boldsymbol{\xi}(t)}{dt^2} + (\mathbf{N} - s\mathbf{I}_{6 \times 6})\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{0}_{6 \times 1}; \boldsymbol{\xi}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{J} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}; \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 \\ -\mathbf{N}_3 & -\mathbf{N}_1^T \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^T; \mathbf{N}_2 = \mathbf{T}^{-1}; \mathbf{N}_3 = \mathbf{Q} + \mathbf{R}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^T \quad (8.3)$$

### - Analyse dynamique

Nous cherchons la solution de l'équation (8) sous forme polynomiale en en effectuant une interpolation de Lagrange de degré  $N_p$ . Cette approche a été proposée par Ewolo et al. [4].

En subdivisant le domaine temporel en  $M$  sous intervalles d'égal longueur, on a dans le  $r^{\text{ème}}$  intervalle  $[(r-1)\Delta T, r\Delta T]$  :

$$\boldsymbol{\xi}^r(t) = \sum_{\alpha=0}^{N_p} \boldsymbol{\xi}(t_\alpha^r) L_\alpha(t); L_\alpha(t) = \prod_{\substack{\beta=0 \\ \alpha \neq \beta}}^{N_p} \left( \frac{t - t_\beta^r}{t_\alpha^r - t_\beta^r} \right) \quad (9)$$

$$t_\alpha^r = (r-1)\Delta T + \frac{\Delta T}{2} \left( 1 + \cos \left( \frac{(2\alpha+1)\pi}{2(N_p+1)} \right) \right) \quad (10)$$

Dans cette dernière relation, les fonctions  $L_\alpha(t)$  constituent la base de Lagrange de dimension  $N_p+1$  et les points d'interpolation  $t_\alpha^r (\alpha = 0, 1, \dots, N_p; r = 1, \dots, M)$  sont connus sous le nom de points de Tchebycheff. Ainsi, en considérant cette forme de solution, nous avons en un instant  $t_i$  de l'intervalle considéré les relations suivantes :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi}^r(t_i) = \sum_{\alpha=0}^{N_p} \omega_{i\alpha}^{(0)} \boldsymbol{\xi}(t_\alpha^r) \\ \left[ \frac{d^\delta \boldsymbol{\xi}^r(t)}{dt^\delta} \right]_{t_i} = \sum_{\alpha=0}^{N_p} \omega_{i\alpha}^{(\delta)} \boldsymbol{\xi}(t_\alpha^r) \end{cases} ; \begin{cases} \omega_{i\alpha}^{(0)} = L_\alpha(t_i) \\ \omega_{i\alpha}^{(\delta)} = \left[ \frac{d^\delta L_\alpha(t)}{dt^\delta} \right]_{t_i} \end{cases} \quad (11)$$

En combinant les équations (8), (9), (10) et (11), nous obtenons l'équation discrète aux valeurs et aux vecteurs propres suivante :

$$(\mathbf{N} + \rho^{(k)} \omega_{i\alpha}^{(2)} \mathbf{\Omega}) \boldsymbol{\xi}(t_\alpha^r) = s \boldsymbol{\xi}(t_\alpha^r) \quad (12)$$

Après la résolution de l'équation (12), la solution à la  $k^{\text{ème}}$  couche est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}(z, t_\alpha^r) \\ \mathbf{\Gamma}(z, t_\alpha^r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1(t_\alpha^r) & \mathbf{A}_2(t_\alpha^r) \\ \mathbf{B}_1(t_\alpha^r) & \mathbf{B}_2(t_\alpha^r) \end{bmatrix} \langle e^{sz} \rangle \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1(t_\alpha^r) \\ \mathbf{K}_2(t_\alpha^r) \end{bmatrix} \quad (13.1)$$

$\mathbf{K}_1(t_\alpha^r)$  et  $\mathbf{K}_2(t_\alpha^r)$  étant des matrices  $3 \times 1$  avec :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1(t_\alpha^r) = (\mathbf{a}_1(t_\alpha^r) \quad \mathbf{a}_2(t_\alpha^r) \quad \mathbf{a}_3(t_\alpha^r)) \\ \mathbf{A}_2(t_\alpha^r) = (\mathbf{a}_4(t_\alpha^r) \quad \mathbf{a}_5(t_\alpha^r) \quad \mathbf{a}_6(t_\alpha^r)) \\ \mathbf{B}_1(t_\alpha^r) = (\mathbf{b}_1(t_\alpha^r) \quad \mathbf{b}_2(t_\alpha^r) \quad \mathbf{b}_3(t_\alpha^r)) \\ \mathbf{B}_2(t_\alpha^r) = (\mathbf{b}_4(t_\alpha^r) \quad \mathbf{b}_5(t_\alpha^r) \quad \mathbf{b}_6(t_\alpha^r)) \end{cases} \quad (13.2)$$

$$\begin{cases} \mathbf{a}_i(t_\alpha^r) = (a_{1i}(t_\alpha^r) \quad a_{2i}(t_\alpha^r) \quad a_{3i}(t_\alpha^r))^T \\ \mathbf{b}_i(t_\alpha^r) = (b_{1i}(t_\alpha^r) \quad b_{2i}(t_\alpha^r) \quad b_{3i}(t_\alpha^r))^T \\ \langle e^{sz} \rangle = \text{diag}(e^{s_1 z} \quad e^{s_2 z} \quad e^{s_3 z} \quad e^{s_4 z} \quad e^{s_5 z} \quad e^{s_6 z}) \end{cases} \quad (13.3)$$

L'équation (13.1) conduit aux relations suivantes :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}(z, t_\alpha^r) \\ \mathbf{\Gamma}(z, t_\alpha^r) \end{bmatrix} = \mathbf{P}_k(z - z_{k-1}, t_\alpha^r) \begin{bmatrix} \mathbf{u}(z_{k-1}, t_\alpha^r) \\ \mathbf{\Gamma}(z_{k-1}, t_\alpha^r) \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{P}_k(z - z_{k-1}, t_\alpha^r) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \langle e^{s(z-z_{k-1})} \rangle \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}^{-1} \quad (15)$$

La matrice  $\mathbf{P}_k(z - z_{k-1}, t_\alpha^r)$  est appelée matrice de propagation de la  $k^{\text{ème}}$  couche à l'instant  $t_\alpha^r$ .

La relation de transfert globale de la poutre stratifiée permettant d'appliquer les conditions aux limites de type force est donnée à chaque instant de Tchebycheff  $t_\alpha^r$  par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}(z_N, t_\alpha^r) \\ \mathbf{\Gamma}(z_N, t_\alpha^r) \end{bmatrix} = \prod_{k=N}^1 \mathbf{P}_k(h_k, t_\alpha^r) \begin{bmatrix} \mathbf{u}(z_0, t_\alpha^r) \\ \mathbf{\Gamma}(z_0, t_\alpha^r) \end{bmatrix} \quad (16)$$

La solution à l'altitude  $z$  de la  $k^{\text{ème}}$  couche à un instant  $t$  du  $r^{\text{ème}}$  intervalle de temps de la poutre stratifiée est donnée par :

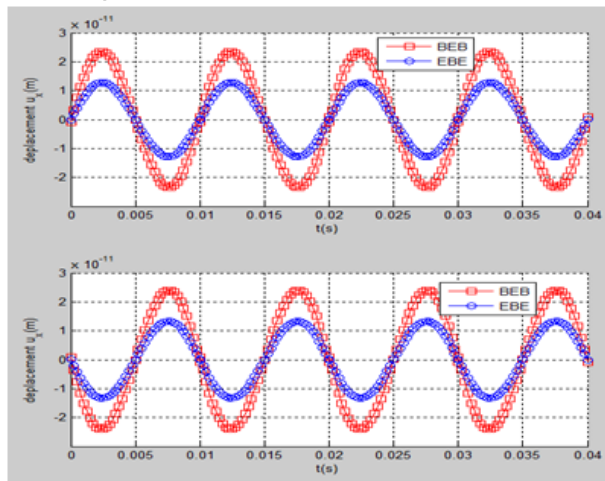
$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}(z, t) \\ \mathbf{\Gamma}(z, t) \end{bmatrix} = \sum_{\alpha=0}^{N_p} L_\alpha(t) \mathbf{P}_k(z - z_{k-1}, t_\alpha^r) \begin{bmatrix} \mathbf{u}(z_{k-1}, t_\alpha^r) \\ \mathbf{\Gamma}(z_{k-1}, t_\alpha^r) \end{bmatrix} \quad (17.1)$$

$$\text{où, } \begin{bmatrix} \mathbf{u}(z_{k-1}, t_\alpha^r) \\ \mathbf{\Gamma}(z_{k-1}, t_\alpha^r) \end{bmatrix} = \prod_{\delta=k-1}^1 \mathbf{P}_k(h_\delta, t_\alpha^r) \begin{bmatrix} \mathbf{u}(z_0, t_\alpha^r) \\ \mathbf{\Gamma}(z_0, t_\alpha^r) \end{bmatrix} \quad (17.2)$$

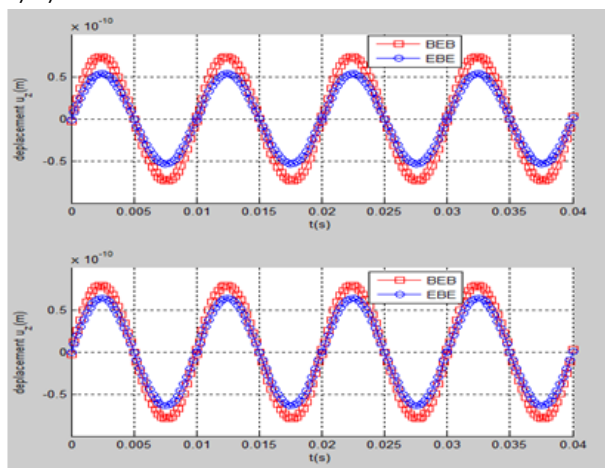
## 3. Résultats numériques

La poutre stratifiée piézoélectrique est constituée du titanate de baryum ( $\text{BaTiO}_3 \equiv B$ ) et du graphite époxy ( $\equiv E$ ). Les configurations considérées sont  $E/B/E$  et  $B/E/B$  avec  $h_E = h_B = h/3 = 0.1m$  et  $L = 1m$ . Les figures 2 présentent la réponse dynamique de la poutre induite par le chargement

mécanique  $\sigma_{zz}(h, t) = \sin(2\pi ft) \sin(\pi x/L)$  (en  $N/m^2$ ). Les solutions ont été calculées dans les quatre premiers intervalles de temps ( $r = 1,2,3,4$ ) et au point  $x = 0.5L$  pour  $\Delta T = 1/f = 0.01s$  et  $N_p = 6$ .



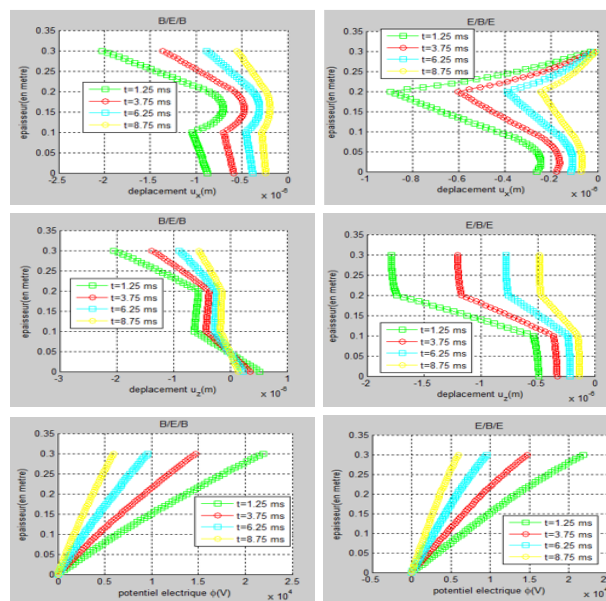
**Figure 2.1 :** Déplacements  $u_x(m)$  et  $u_z(m)$  sur la surface inférieure de la poutre avec les configurations  $E/B/E$  et  $B/E/B$ .



**Figure 2.2 :** Déplacements  $u_x(m)$  et  $u_z(m)$  sur la surface supérieure de la poutre avec les configurations  $E/B/E$  et  $B/E/B$ .

Les figures 3 présentent la réponse dynamique le long de l'épaisseur de la poutre aux instants  $t = 1.25ms$ ,  $t = 3.75ms$ ,  $t = 6.25ms$  et  $t = 8.75ms$  du premier intervalle induite par le potentiel électrique  $\phi(h, t) = \sin(2\pi ft) \sin(\pi x/L)$  (en  $V$ ) dans les configurations  $E/B/E$  et  $B/E/B$ . Les solutions ont été calculées au point  $x = 0.5L$  pour  $\Delta T = 1/f = 0.01s$  et  $N_p = 6$ .

Il en ressort de ces figures que les déplacements sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre sont des fonctions sinusoïdales du temps. En outre, on peut clairement observer sur ces figures que la séquence d'empilement de la poutre influence énormément sa réponse dynamique.



**Figure 3 :** Variables d'état dans les configurations  $E/B/E$  et  $B/E/B$  aux instants  $t = 1.25ms$ ,  $t = 3.75ms$ ,  $t = 6.25ms$  et  $t = 8.75ms$  du premier intervalle de temps induit par le potentiel électrique.

#### 4. Conclusion

Dans cette communication, un modèle semi analytique couplant le pseudo-formalisme de Stroh avec les polynômes de Lagrange et la méthode de la matrice de propagation pour la prédiction du comportement dynamique des poutres stratifiées piézoélectriques simplement appuyées a été développé. Les résultats numériques ont montrés l'effet de la séquence d'empilement sur le comportement dynamique des poutres stratifiées piézoélectriques.

#### 6. References

- [1] Ajdour M and Azrar L (2013) Analytical solutions of loaded multifunctional multilayered plates. *Advanced Materials Research* 682:127–134.
- [2] Pan E (2001) Exact solution for simply supported and multilayered magneto-electro-elastic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics* 68(4):608–618.
- [3] Heyliger PR and Pan E (2004) Static fields in magneto-electro-elastic laminates. *AIAA Journal* 42(7):1435–1443.
- [4] Ewolo Ngak FP, Ntamack GE and Azrar L (2019) Dynamic analysis of multilayered magneto-electro-elastic plates based on a pseudo-Stroh formalism and Lagrange polynomials. *Journal of Intelligent Material Systems*.
- [5] Yan W and Chen WQ (2006) Electro-mechanical response of functionally graded beams with imperfectly integrated surface piezoelectric layers. *Science in China Series G: Physics, Mechanic & Astronomy* 49:513-525.
- [6] YanW, Wang J and Chen WQ (2014) Cylindrical bending Response of angle-ply piezoelectric laminates with viscoelastic interfaces. *Applied Mathematical Modeling* 38: 6018–6030.

## Calcul à la rupture des arcs en maçonnerie : comparaison entre deux méthodes numériques

### Yield analysis of masonry arches: comparison of two numerical methods

M.T. FADEL<sup>1</sup>, M. RGUIG<sup>1</sup>, M. EL AROUSSI<sup>1</sup>, S. SAADANE<sup>1</sup>

1. Ecole Hassania des Travaux Publics (Casablanca) [fadel.mohamedtaha.cedoc@ehtp.ac.ma](mailto:fadel.mohamedtaha.cedoc@ehtp.ac.ma)

#### Abstract

Masonry arch bridge, have an architectural and functional peculiarity, their mechanical behaviour undergone several developments dealing with yield design. Among the fastest and most reliable calculation methods, the rigid block method is briefly reviewed in this paper. Is also presented the adaptation of the classical finite element method to the principle of calculation at failure, recently being privileged as a more exact and numerically more advantageous tool. The paper ends with a comparison of the two methods.

#### Résumé

Les structures des ponts en maçonnerie, ayant une particularité architecturale et fonctionnelle, ont connu plusieurs développements sur l'aspect de calcul à la rupture. Parmi les méthodes de calcul les plus rapides et fiables, figure la méthode des blocs rigides, qui est rappelée brièvement dans cette communication. L'adaptation de la méthode classique des éléments finis au principe de calcul à la rupture est également présentée, récemment de plus en plus privilégiée en tant qu'outil plus exact et numériquement plus avantageux. La communication s'achève par une comparaison des deux méthodes.

**Mots clés :** *Arc en maçonnerie, blocs rigides, méthode des éléments finis, calcul à la rupture.*

**Keywords :** *Masonry arch, rigid blocks, finite element method, yield analysis*

#### 1. Introduction

Les arcs en maçonnerie figurent parmi les conceptions les plus anciennes du monde des ponts, leur forme assez naturelle facile à mettre en œuvre a permis aux anciens constructeurs de ponts à franchir divers obstacles. Si les modèles empiriques de dimensionnement ont servi à la construction de plusieurs arcs en maçonnerie jusqu'au début du XXème siècle, l'essor considérable de

la mécanique analytique au bout de cette période a permis de retracer la théorie de l'arc en maçonnerie et de préparer le terrain aux modèles numériques approfondis. La question principale que posent ses structures anciennes, concerne leur capacité portante qui est à évaluer compte tenu des caractéristiques mécaniques et géométriques de l'arc.

Le développement de la méthode des éléments finis et ses applications en ingénierie ont permis un essor considérable qui intéresse de plus en plus récemment les techniques d'analyse limite et de calcul à la rupture. L'objet de la présente communication est de présenter une comparaison entre deux modèles numériques, l'un basé sur une formulation mathématique simple et faisant usage de la programmation linéaire, à un modèle numérique basé sur la théorie des éléments finis pour l'évaluation de la capacité portante des arcs en maçonnerie.

#### 2. Calcul à la rupture par le modèle des blocs rigides

##### 2.1 Problématique

On présente ici le cadre théorique de l'équilibre d'un arc en maçonnerie formé par une multitude de blocs jointés par des interfaces de mortier. On suppose que ces joints assurent la liaison des blocs qui sont supposés d'une rigidité infinie à la compression, les « faiblesses » sont donc supposées concentrées dans les joints dans lesquelles une amorce de fissure peut se développer jusqu'à conduire à une rupture locale.

L'hyperstaticité élevée d'un arc en maçonnerie supposé encastré dans ces naissances, qui de l'ordre de 4, nécessite la formation d'au moins 4 zones de rupture locale pour causer une ruine générale, ces zones sont nommées des rotules.

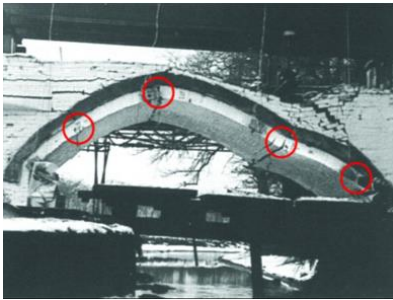


Figure 1 : Mécanisme de ruine à 4 rotules

Les effets dues aux remplissages ont été négligés dans ce qui suit, afin de statuer sur la portance de l'arc seul, des travaux similaires ont déjà été effectués [1] [2] dans ce sens.

### 2.2 Formulation mathématique

Les travaux de base présentant la méthode des blocs rigides [3]-[4] avec détails proposent de rechercher l'équilibre de l'arc en supposant qu'il est soumis :

- Aux charges dues au poids propre  $f_{DL}$  ;
- Aux surcharges dues aux essieux mobiles  $f_{LL}$  ;

Ces dernières surcharges sont affectées par un coefficient multiplicatif  $\lambda$  afin de tenir compte de l'augmentation des ces surcharges jusqu'à la rupture.

L'équilibre de l'arc composé de N blocs est représenté par une matrice E de dimension  $(3*N; 3*(N+1))$ , on écrit l'équation générale de l'équilibre par la formule :

$$E * x = f_{DL} + \lambda * f_{LL} \tag{1}$$

Où le vecteur  $x$  rassemble les forces de contact (effort normal  $n_i$ , effort tranchant  $s_i$ , moment  $m_i$ ) au niveau des interfaces entre blocs :

$$x^T = \{(n_i; s_i; m_i); i = 1, N\} \tag{2}$$

Par la suite, il y a lieu d'exprimer les relations entre les différentes grandeurs formant le vecteur  $x$ , qui sont en réalité des conditions de « non-rupture » de l'arc :

- 1- Condition de non apparition de zone de traction sous l'effet du couple  $(n_i; m_i)$  :

$$|m_i| \leq 0.5 * n_i * e_i \tag{3}$$

- 2- Condition de non rupture par glissement au niveau de l'interface entre blocs :

$$|s_i| \leq f_i * n_i \tag{4}$$

Où  $e_i$  est l'épaisseur du joint numéro i et  $f_i$  est le coefficient de frottement au niveau du même joint.

On procède à l'augmentation du coefficient  $\lambda$  jusqu'à obtenir la rupture qui est traduite par la violation de l'une des conditions précitées, on doit donc chercher la valeur maximale du coefficient  $\lambda$  sous les différentes contraintes.

Les équations (1), (3) et (4) forment ainsi un système de programmation linéaire qu'on peut formuler sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \text{Max } \lambda \\ & \text{sous les contraintes : (1), (3) et (4)} \end{aligned} \tag{5}$$

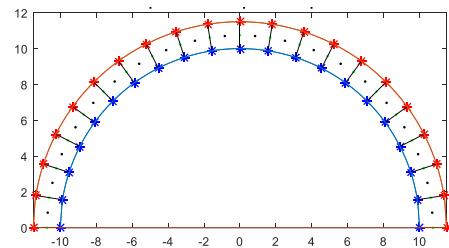


Figure 2 : Discrétisation de l'arc en blocs liaisonnés par joints de mortier

La solution du problème d'optimisation est effectuée moyennant le solveur de programmation linéaire MOSEK [5], qui est très utilisé dans les travaux d'optimisation grâce à sa rapidité et sa robustesse.

### 3. Calcul à la rupture par éléments finis

#### 3.1 Rappel de la théorie de calcul à la rupture

L'analyse de la structure d'un arc en maçonnerie par la méthode des éléments finis est assez classique dans le cadre de la théorie de l'élasticité, pourtant l'approche visant à aboutir à un calcul à la rupture est assez différente et nécessite de rappeler quelques bases théoriques avant de présenter la modélisation [6] [7].

Le tenseur des efforts intérieurs dans l'arc est décrit via la notation  $\sigma$ , tandis que la structure de l'arc est décrite par la notation relative au domaine  $\Omega$ , ce domaine est soumis à des chargements Q, soit volumiques ou bien surfaciques qui peuvent agir sur sa frontière  $\Sigma$ .

Un calcul à la rupture ne peut avoir sens que si on définit un critère de résistance, décrit lui aussi par un domaine G dans l'espace des tenseurs de contraintes  $\sigma$ , ce domaine est convexe par propriété :

$$f(\underline{\sigma}) \leq 0 \Leftrightarrow \underline{\sigma} \in G$$

L'existence d'un champ d'efforts intérieurs statiquement admissibles avec les chargements appliqués et qui vérifie les conditions de résistance permet de définir un domaine de chargements potentiellement supportables par la structure noté K.

$$K = \left\{ \begin{array}{l} \text{chargements } Q \text{ tq} \\ \exists \underline{\sigma} \text{ statiquement admissible avec } Q \\ \underline{\sigma} \in G \end{array} \right.$$

A partir de la définition de ce domaine on cherche à trouver un maximum de chargement y appartenant et en constituer une enveloppe convexe, on trouve ainsi une borne inférieure de la charge limite pour la structure étudiée, c'est l'approche statique par l'intérieur, elle permet de trouver un minorant au chargement limite :

$$\sup\{\lambda \text{ tel que } \lambda \underline{\sigma} \in G; \underline{\sigma} \text{ statiquement admissible avec } Q\}$$

L'approche cinématique par l'extérieur est une approche « duale » basée sur la recherche des chargements qui n'appartiennent pas au K, cette description par l'extérieur de K et qui nécessite un passage vers la cinématique des champs de vitesse et nécessairement l'introduction du Principe des Puissances Virtuelles.

Le passage vers une description discrète du modèle mécanique ainsi que de la formulation de l'équilibre est nécessaire afin d'obtenir un problème en dimension fini solvable numériquement par la méthode des éléments finis. On introduit ainsi les fonctions d'interpolation.

Le choix du type des éléments finis dits « de borne inférieure » ou « de borne supérieure » est aussi nécessaire afin d'interpoler linéairement ou quadratiquement l'état de contraintes

### 3.2 Modèle mécanique élaboré

Le logiciel OPTUM dans sa version bidimensionnelle G2 [8] permet d'effectuer une modélisation de l'arc en maçonnerie par éléments infiniment rigides pour les blocs, pour les joints de mortiers, on peut les modéliser par des joints de cisaillement (shear joints), ces joints suivent une loi de Mohr-Coulomb, la plus adaptée à un comportement frottant simple sans cohésion :

$$(\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi - 2C \cos \varphi \leq 0 \quad (5)$$

La liaison avec le sol est assurée également avec la même loi de comportement en respectant les conditions d'appui (encastrement) au niveau des naissances de l'arc.

### 4. Etude de cas et comparaison

On étudie ci-après par les deux méthodes différentes présentées ci-avant, un arc en maçonnerie dont on cherche le multiplicatif maximale provoquant la rupture par les deux méthodes en vérifiant le mécanisme de rupture au 4 rotules dans les deux méthodes :

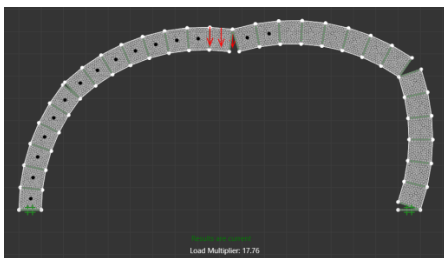


Figure 3: Résultats OPTUM-G2

On récupère des résultats assez comparables pour les deux méthodes, en étudiant le bloc 14 en milieu de l'arc, ainsi que le bloc 7 au niveau du 1/4 de l'arc dits reins de l'arc :

Méthode	Blocs rigides	Eléments finis	
En mi-travée	$\lambda$ (en kN)	17.93	17.76
	Rotules	7-15-23-29	7-15-23-29
Au reins	$\lambda$ (en kN)	82.75	80.52
	Rotules	5-14-23-29	5-14-23-29

Les écarts sur les multiplicatifs de rupture varient entre 0.95% en travée à 2.77% au niveau des reins, tandis que sur les mécanismes de rupture on récupère les mêmes emplacements des rotules.

### 5. Conclusion

Les deux méthodes utilisées dans ce travail sont la méthode des éléments finis à travers le logiciel OPTUM d'une part, et la méthode des blocs rigides programmée par l'auteur sur MATLAB couplée au solveur d'optimisation linéaire MOSEK d'autre part, l'objectif est de comparer ces deux méthodes pour le calcul à la rupture d'un arc en maçonnerie.

Nous avons eu une excellente convergence entre les deux méthodes, notamment en termes de mécanisme de rupture ainsi qu'au niveau des multiplicatifs de rupture en travée, celle-ci étant la zone la plus concernée par une analyse à la rupture d'un arc destiné à un fonctionnement de pont.

### Références

- [1] Orsolya Gáspár, András A. Sipos & István Sajtos, *Effect of stereotomy on the lower bound value of minimum thickness of semi-circular masonry arches*, International Journal of Architectural Heritage (2018) 899-921.
- [2] Makris, N., Alexakis, H. *The effect of stereotomy on the shape of the thrust-line and the minimum thickness of semicircular masonry arches*. Arch Appl Mech 83, (2013) 1511–1533.
- [3] Gilbert, M. & Melbourne, C. *Rigid-block analysis of masonry structures*. The Structural Engineer 72, (1994) 356–360.
- [4] Livesley, R. K. A. *Limit analysis of structures formed from rigid blocks*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 12, (1978), 1853–1871.
- [5] Mosek. The Mosek optimization software. Available from: <http://www.mosek.com/>. (2014), site consulté en Février 2021
- [6] de Buhan, P. *Plasticité et calcul à la rupture*. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. (2007).
- [7] Salençon, J. (1983). *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- [8] K. Krabbenhøft, A.V. Lyman, J. Krabbenhøft *OptumG2: theory* Optum Computational Engineering, Newcastle, Australia (2016)

## Buckling and lateral buckling interaction of a thin-walled beam with open-section

Zaenab Bakhach<sup>1\*</sup>, Ahmed El Kaimbillah<sup>1</sup>, Abdellah Hamdaoui<sup>1</sup>, Bouazza Braikat<sup>1</sup>, Foudil Mohri<sup>2</sup>,  
Noureddine Damil<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire d'Ingénierie et Matériaux LIMAT, Faculté des Sciences Ben M'Sik, Hassan II University of Casablanca, B.P 7955 Sidi Othman, Casablanca, Maroc.

<sup>2</sup>Laboratoire d'Etude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux LEM3, CNRS UMR 7239, Université Lorraine, Metz, Ile du Saulcy, 57045, Metz Cedex 01, France.

### Abstract

In this paper, we revisit the buckling and lateral buckling interaction problem of a thin-walled beam with open-section studied in [1]. Starting from a dimensionless nonlinear stability model, a stability formula for the interaction of lateral buckling with axial forces is established. Using this formula, we can recover the cases studied in [1]. Numerical applications are given to validate and compare the results with 3D beam finite element simulations including warping.

**Keywords:** Buckling, Thin-walled beam, Open section

### 1. Introduction

Thin-walled beams with open sections constitute basic parts of many complex structures in civil constructions, automotive and aeronautic fields. They are extensively used in engineering applications when requirements of weight saving are of primary importance. Due to their shapes, these structures are highly sensitive to torsion and instabilities.

Several works have been carried out to establish explicit analytical formulae for the calculation of lateral buckling of thin-walled beams with open-section in the presence or absence of axial forces by considering different parameters. We referred to the discussion and references in [1] in which closed-form formulae are proposed.

In this paper, the same nonlinear model, as in [1], is used to establish a new closed-form solution for beam lateral buckling of thin-walled beam with open-section in presence of an axial load. Warping, large torsion and flexural-torsional coupling are considered. For this purpose, we first made the equilibrium equations of the dimensionless nonlinear model and then established the stability formula from the singularity of the tangent matrix.

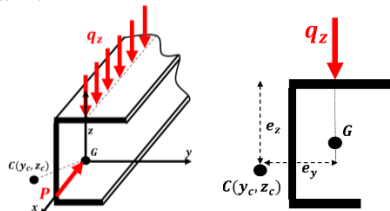


Fig.1: Thin-walled beam with open-section under external loading.

### 2. Flexional-torsional equilibrium equations for beam stability

We consider a straight thin-walled beam with open-section  $A$  and length  $L$ , see figure 1, where  $x$  denotes the initial longitudinal axis,  $y$  and  $z$  denote the principal bending axes. The origin of these axes is located at the center  $G$  and the shear center with co-ordinates  $(y_c, z_c)$  in  $Gyz$  is denoted  $C$ . A point  $M$  on the section contour has coordinates  $(y, z, \omega)$ , where  $\omega$

denotes the sectorial coordinate of the point used in Vlasov's model for non-uniform torsion [2]. The components of the displacement of the point  $M$  are derived from component of displacement  $(v, w)$  of the shear center  $C$  in  $y$  and  $z$  directions as in [3,4]:

$$\begin{aligned} u_M(x, y, z) &= u(x) - y\alpha_z(x) - z\alpha_y(x) - \omega(y, z)\theta'_x \\ v_M(x, y, z) &= v(x) + (y - y_c)(\cos\theta_x - 1) - (z - z_c)\sin\theta_x \\ w_M(x, y, z) &= w(x) + (z - z_c)(\cos\theta_x - 1) + (y - y_c)\sin\theta_x \\ \alpha_y(x) &= w'(x)\cos\theta_x - v'(x)\sin\theta_x \\ \alpha_z(x) &= v'(x)\cos\theta_x + w'(x)\sin\theta_x \end{aligned}$$

where  $u$  is the axial displacement of  $G$ ,  $\theta_x$  is the torsion angle and  $(\ )'$  is the  $x$ -derivative. Equilibrium equations are obtained from stationary conditions of the total potential energy:  $\delta U - \delta W = 0$ ,  $U$  and  $W$  are the strain energy and the external load work. In the case of uniformly distributed loads  $q_z$  are applied along the axis  $z$  with eccentricity  $e_y$  and  $e_z$  from the shear point and a constant axial force  $P$  applied at beam ends, the equilibrium equations are given by [1,3,4]:

$$N = -P$$

$$P(v' + y_c\theta'_x\sin\theta_x + z_c\theta'_x\cos\theta_x)' + (M_y\sin\theta_x)'' - (M_z\cos\theta_x)'' = 0$$

$$P(w' - y_c\theta'_x\cos\theta_x + z_c\theta'_x\sin\theta_x)' - (M_y\cos\theta_x)'' - (M_z\sin\theta_x)'' = q_z$$

$$\begin{aligned} &-P(y_c\theta'_x(w'\sin\theta_x + v'\cos\theta_x) + z_c\theta'_x(w'\cos\theta_x - v'\sin\theta_x)) + \\ &P(y_c(v'\sin\theta_x - w'\cos\theta_x)' - z_c(v'\cos\theta_x + w'\sin\theta_x)') + \\ &M_y(w''\sin\theta_x + v''\cos\theta_x) - M_z(w''\cos\theta_x - v''\sin\theta_x) + \\ &B''_{\omega} - (M_R\theta'_x)' - M'_{sv} = -q_z e_z \sin(\theta_x) \end{aligned}$$

where  $N$  is the axial force,  $M_y$  and  $M_z$  are the bending moments,  $B_{\omega}$  is the bimoment and  $M_{sv}$  is the St-Venant torsion moment.  $M_R$  is a higher order stress resultant called Wagner's moment. In the case of elastic behaviour,  $E$  and  $G$  being the Young's and shear modulus, the generalized stresses are given by:

$$N = EA \left( u' + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) - \psi\theta'_x \right) + \frac{1}{2} EAI_0\theta_x'^2$$

$$M_y = -EI_y(k_y - \beta_z\theta_x'^2)$$

$$M_z = -EI_z(k_z - \beta_y\theta_x'^2)$$

$$M_{sv} = GJ\theta_x'$$

$$B_{\omega} = EI_{\omega}(\theta_x'' - \beta_{\omega}\theta_x'^2)$$

$$\begin{aligned} M_R &= EA \left( u' + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) - \psi\theta_x' \right) I_0 - 2EI_z\beta_y k_z - \\ &2EI_y\beta_z k_y - 2EI_{\omega}\beta_{\omega}\theta_x'' + \frac{1}{2}E(I_R + AI_0^2)\theta_x'^2 \end{aligned}$$

$$\psi(x) = y_c(w'(x)\cos(\theta_x) - v'(x)\sin(\theta_x)) - z_c(v'(x)\cos(\theta_x) + w'(x)\sin(\theta_x))$$

$A$ ,  $I_y$  and  $I_z$  denote respectively the cross-section area and the second moments of area about the principal axes  $y$  and  $z$ .  $J$  and  $I_\omega$  are respectively St-Venant torsion and warping constants.  $I_0$  is the polar moment of area about shear centre.  $\beta_y$ ,  $\beta_z$  and  $\beta_\omega$  are the Wagner's coefficients. To make the equilibrium equations of the dimensionless problem, we introduce the following notations:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{L}, \quad \bar{z} = \frac{z}{L}, \quad \bar{u} = \frac{u}{L}, \quad \bar{v} = \frac{v}{L}, \quad \bar{w} = \frac{w}{L}$$

$$\bar{N} = \frac{N}{EA}, \quad \bar{M}_y = \frac{LM_y}{EI_y}, \quad \bar{M}_z = \frac{LM_z}{EI_z}, \quad \bar{M}_{sv} = \frac{LM_{sv}}{GJ}$$

$$\bar{B}_\omega = \frac{L^2 B_\omega}{EI_\omega}, \quad \bar{M}_R = \frac{M_R}{EAL_0}, \quad \bar{A} = \frac{A}{L^2}, \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{L}, \quad \bar{I}_0 = \frac{I_0}{L^2}, \quad \bar{J} = \frac{J}{L^4}$$

$$\bar{I}_y = \frac{I_y}{L^4}, \quad \bar{I}_z = \frac{I_z}{L^4}, \quad \bar{I}_\omega = \frac{I_\omega}{L^6}, \quad \bar{I}_R = \frac{I_R}{L^6}, \quad \bar{k}_y = Lk_y, \quad \bar{k}_z = Lk_z$$

$$\bar{\beta}_y = \frac{\beta_y}{L}, \quad \bar{\beta}_z = \frac{\beta_z}{L}, \quad \bar{P} = \frac{P}{EA}, \quad \bar{q}_z = \frac{Lq_z}{EA}, \quad r_1 = \frac{I_y}{AL^2}$$

$$r_2 = \frac{I_z}{AL^2}, \quad r_3 = \frac{I_\omega}{AL^4}, \quad r_4 = \bar{I}_0, \quad r_5 = \frac{\beta_y}{L}, \quad r_6 = \frac{\beta_z}{L}, \quad r_7 = \frac{I_z \beta_y}{AI_0 L}$$

$$r_8 = \frac{I_y \beta_z}{AI_0 L}, \quad r_9 = \frac{I_\omega \beta_\omega}{AI_0 L^2}, \quad r_{10} = \frac{I_R}{AI_0 L^2} + \frac{I_0}{2}, \quad r_{11} = \frac{GJ}{L^2 EA}$$

We thus obtain the dimensionless equations describing the equilibrium and the behaviour of the studied beam:

$$\bar{N} = -\bar{P}$$

$$\bar{P}(\bar{v}' + \bar{y}_c \theta'_x \sin \theta_x + \bar{z}_c \theta'_x \cos \theta_x)' + r_1 (\bar{M}_y \sin \theta_x)'' - r_2 (\bar{M}_z \cos \theta_x)'' = 0$$

$$\bar{P}(\bar{w}' - \bar{y}_c \theta'_x \cos \theta_x + \bar{z}_c \theta'_x \sin \theta_x)' - r_1 (\bar{M}_y \cos \theta_x)'' - r_2 (\bar{M}_z \sin \theta_x)'' = \bar{q}_z$$

$$-\bar{P} \theta'_x (\bar{y}_c (\bar{w}' \sin \theta_x + \bar{v}' \cos \theta_x) - \bar{z}_c (\bar{w}' \cos \theta_x - \bar{v}' \sin \theta_x)) + \bar{P} (\bar{y}_c (\bar{v}' \sin \theta_x - \bar{w}' \cos \theta_x) + \bar{z}_c (\bar{v}' \cos \theta_x + \bar{w}' \sin \theta_x))' + r_1 \bar{M}_y (\bar{w}'' \sin \theta_x + \bar{v}'' \cos \theta_x) - r_2 \bar{M}_z (\bar{w}'' \cos \theta_x - \bar{v}'' \sin \theta_x) + r_3 \bar{B}_\omega'' - r_4 (\bar{M}_R \theta'_x)' - r_{11} \bar{M}_{sv}'' = -\bar{q}_z \bar{e}_z \sin(\theta_x)$$

$$\bar{N} = \bar{u}' + \frac{1}{2}(\bar{v}'^2 + \bar{w}'^2) - \bar{\psi} \theta'_x + \frac{1}{2} r_4 \theta_x'^2$$

$$\bar{M}_y = -\bar{k}_y + r_6 \theta_x'^2$$

$$\bar{M}_z = \bar{k}_z - r_5 \theta_x'^2$$

$$\bar{M}_{sv} = \theta_x'$$

$$\bar{B}_\omega = \theta_x'' - \beta_\omega \theta_x'^2$$

$$\bar{M}_R = \left( \bar{u}' + \frac{1}{2}(\bar{v}'^2 + \bar{w}'^2) - \bar{\psi} \theta_x' \right) - 2r_7 \bar{k}_z -$$

$$2r_8 \bar{k}_y - 2r_9 \theta_x'' + \frac{1}{2} r_{10} \theta_x'^2$$

The trigonometric functions are approximated by:  $\cos \theta_x = 1 + \frac{1}{2} \theta_x'^2$  and  $\sin \theta_x = \theta_x + \frac{1}{6} \theta_x'^3$ . To solve the nonlinear differential system, a Ritz's approximation method is first applied in the case of simply supported beam:  $(\bar{w}, \bar{v}, \theta_x) =$

$(\bar{w}_0, \bar{v}_0, \theta_0) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ . After integration and some calculations, the three coupled equilibrium equations are:

$$-\bar{P} \left( \bar{v}_0 + \frac{4}{3\pi} \theta_0^2 \bar{y}_c + \bar{z}_c \left( \theta_0 + \frac{1}{8} \theta_0^3 \right) \right) + \bar{P}_z \bar{\beta}_y \frac{16}{3\pi} \theta_0^2 -$$

$$4\bar{P}_z \bar{\beta}_y \theta_0^2 + \frac{5}{4} \bar{P}_y \bar{\beta}_z \theta_0^3 + \bar{P}_z \left( \bar{v}_0 + \frac{\pi^2}{8} \bar{v}_0^3 \right) +$$

$$(\bar{P}_z - \bar{P}_y) \left( \frac{8}{3\pi} \bar{w}_0 \theta_0 - \frac{3}{4} \bar{v}_0 \theta_0^2 \right) = 0$$

$$\bar{P} \left( -\bar{w}_0 + \bar{y}_c \left( \theta_0 - \frac{1}{8} \theta_0^3 \right) + \frac{4}{3\pi} \theta_0^2 \bar{z}_c \right) + \frac{8}{3\pi} \bar{P}_y \bar{\beta}_z \theta_0^2 -$$

$$\frac{1}{4} \bar{P}_z \bar{\beta}_y \theta_0^3 + \bar{P}_y \left( \bar{w}_0 + \frac{\pi^2}{8} \bar{w}_0^3 \right) + (\bar{P}_z - \bar{P}_y) \left( \frac{8}{3\pi} \bar{v}_0 \theta_0 + \frac{3}{4} \bar{w}_0 \theta_0^2 \right)$$

$$- \frac{32}{\pi^3} \bar{M}_0 = 0$$

$$-\bar{P} \left( \bar{y}_c \left( \frac{1}{4} \bar{w}_0 \theta_0^2 + \frac{4}{3\pi} \bar{v}_0 \theta_0 \right) + \bar{z}_c \left( \frac{4}{3\pi} \bar{w}_0 \theta_0 - \frac{1}{4} \theta_0^2 \bar{v}_0 \right) \right) -$$

$$\bar{P} \bar{I}_0 \theta_0 + \bar{P} \left( \bar{y}_c \left( \bar{v}_0 - \frac{1}{8} \bar{w}_0 \theta_0^2 - \frac{4}{3\pi} \bar{v}_0 \theta_0 \right) \right) +$$

$$\bar{P} \bar{z}_c \left( -\bar{v}_0 - \frac{8}{3\pi} \bar{w}_0 \theta_0 + \frac{1}{8} \theta_0^2 \bar{v}_0 \right) + \frac{8\pi \beta_\omega \bar{I}_\omega}{3} \theta_0^2 -$$

$$\frac{\bar{\beta}_y \bar{P}_z}{\bar{A}} \left( \frac{8}{3\pi} \bar{v}_0 \theta_0 + \frac{3}{2} \bar{v}_0 \theta_0^2 - \frac{1}{4} \bar{w}_0 \theta_0^2 \right) +$$

$$\frac{\bar{\beta}_z \bar{P}_y}{\bar{A}} \left( \frac{8}{3\pi} \bar{w}_0 \theta_0 - \frac{9}{4} \bar{v}_0 \theta_0^2 \right) + \bar{I}_0 \theta_0 \bar{P}_\theta + \frac{3\pi^2}{8} \frac{\bar{I}_R}{\bar{A} I_0} \theta_0^3 +$$

$$(\bar{P}_z - \bar{P}_y) \left( \frac{8}{3\pi} \bar{v}_0 \bar{w}_0 - \frac{3}{4} \theta_0 \bar{v}_0^2 + \frac{3}{4} \theta_0 \bar{w}_0^2 \right) + \frac{8}{\pi^2} \bar{e}_z \theta_0 \bar{M}_0 = 0$$

where  $\bar{P}_y = \pi^2 L^2 r_1$ ,  $\bar{P}_z = \pi^2 L^2 r_2$  and  $\bar{P}_\theta = \pi^2 \frac{r_3}{I_0} + \frac{r_{11}}{I_0}$ . The

displacements components in the fundamental state are in the form  $\{\bar{v}_0, \bar{w}_0, \theta_0\}_t = \{0, \bar{w}_0, 0\}$ ,  $\bar{w}_0 = \frac{32}{\pi^3} \frac{\bar{M}_0}{\bar{P}_y - \bar{P}}$ . The buckling

loads  $\bar{M}_0$  are computed from singular points of the tangent matrix  $[K_t]$ . The expression of the  $[K_t]$  matrix in the fundamental state is given by:

$$[K_t] = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} \\ 0 & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & 0 & K_{33} \end{bmatrix}$$

where:  $K_{11} = \bar{P}_z - \bar{P}$ ,  $K_{13} = -\bar{P} \bar{z}_c + \frac{8}{3\pi} \bar{w}_0 (\bar{P}_z - \bar{P}_y)$

$$K_{22} = \bar{P}_y - \bar{P} + \frac{3\pi^2}{8} \bar{P}_y \bar{w}_0^2, \quad K_{23} = \bar{P} \bar{y}_c, \quad K_{31} = \bar{P} \bar{y}_c - \bar{P} \bar{z}_c +$$

$$\frac{8}{3\pi} \bar{w}_0 (\bar{P}_z - \bar{P}_y), \quad K_{33} = \bar{I}_0 (\bar{P}_\theta - \bar{P}) + \frac{3}{4} \bar{w}_0^2 (\bar{P}_z - \bar{P}_y) +$$

$$\frac{8}{3\pi} \bar{\beta}_z \bar{P}_y \bar{w}_0 + \frac{8}{\pi^2} \bar{e}_z \bar{M}_0 - \frac{8}{3\pi} \bar{P} \bar{z}_c \bar{w}_0$$

The buckling moments of the element for a known axial load  $P$  are computed according to the singularity of the tangent matrix  $[K_t]$ . Vanishing the determinant; one gets the following equation in  $\bar{w}_0$ :

$$(\bar{P}_z - \bar{P}) \left[ (\bar{I}_0 (\bar{P}_\theta - \bar{P}) + \frac{3}{4} (\bar{P}_z - \bar{P}_y) \bar{w}_0^2 + \frac{8}{\pi^2} \bar{M}_0 \bar{e}_z + \frac{8}{3\pi} \bar{P}_y \bar{\beta}_z \bar{w}_0 -$$

$$\frac{8}{3\pi} \bar{P} \bar{z}_c \bar{w}_0) - \left( \frac{8}{3\pi} (\bar{P}_z - \bar{P}_y) \bar{w}_0 - \bar{P} \bar{z}_c \right)^2 -$$

$$\bar{P} \bar{y}_c \left( \frac{8}{3\pi} (\bar{P}_z - \bar{P}_y) \bar{w}_0 - \bar{P} \bar{z}_c \right) \right] \left( \bar{P}_y - \bar{P} + \frac{3\pi^2}{8} \bar{P}_y \bar{w}_0^2 \right) = 0$$

This equation permits to determine analytically the critical value of  $\bar{M}_{0,b}$ . Cancelling the second factor of the previous



expression, we obtain:

$$\overline{M}_{0,b}(\overline{P}) = C_1 \overline{P}_z [C_2 \overline{e}_z + C_3 \overline{\beta}_z - C_4 \overline{z}_c - C_5 \overline{y}_c \pm \sqrt{[C_2 \overline{e}_z + C_3 \overline{\beta}_z - C_4 \overline{z}_c - C_5 \overline{y}_c]^2 + g(\overline{P})}]$$

The coefficients  $C_1 - C_5$  are given by:

$$C_1 = \frac{1,13}{\sqrt{k_1}} a_1; C_2 = \frac{0,46}{\sqrt{k_1}} \left(1 - \frac{\overline{P}}{\overline{P}_z}\right) \left(1 - \frac{\overline{P}}{\overline{P}_y}\right); C_3 = \frac{0,495}{\sqrt{k_1}} \left(1 - \frac{\overline{P}}{\overline{P}_z}\right)$$

$$C_4 = \sqrt{k_1} \frac{\overline{P}}{\overline{P}_z} + a_2 \quad ; \quad C_5 = \frac{0,5 \overline{P}}{\sqrt{k_1} \overline{P}_y} \left(1 - \frac{\overline{P}}{\overline{P}_z}\right)$$

$$g(\overline{P}) = a_3 \frac{\overline{I}_0}{\overline{P}_z^2} \left(1 - \frac{\overline{P}}{\overline{P}_y}\right) \left[ \left(1 - \frac{\overline{z}_c^2}{\overline{I}_0} + \frac{\overline{y}_c \overline{z}_c}{\overline{I}_0}\right) \overline{P}^2 - (\overline{P}_z + \overline{P}_\theta) \overline{P} + \overline{P}_z \overline{P}_\theta \right]$$

$$a_1 = \frac{\left(1 - \frac{\overline{P}}{\overline{P}_y}\right)}{\left(1,03 \frac{\overline{P}_z}{\overline{P}_y} \left(1 - \frac{\overline{P}}{\overline{P}_z}\right) + k_1\right)} \quad ; \quad a_2 = \frac{0,5 \overline{P}}{\sqrt{k_1} \overline{P}_y} \left(1 - \frac{\overline{P}}{\overline{P}_z}\right)$$

$$a_3 = \frac{1}{\left(1 - \frac{\overline{P}}{\overline{P}_y}\right)} \left[ \frac{1,04 (\overline{P}_z - \overline{P})}{\overline{P}_y} + k_1 \right] \quad ; \quad k_1 = 1 - \frac{\overline{I}_z}{\overline{I}_y} = 1 - \frac{r_2}{r_1}$$

An analytical solution has been derived for lateral buckling stability of simply supported beam-column element. It considers for pre-buckling deformation, load height level, and the interaction with the presence of axial loads. Different coefficients  $C_1 - C_5$  are given for these load cases. If  $\overline{P} = \overline{P}_z$  is taken in the terms  $a_1$ ,  $a_2$  and  $a_3$ , with  $y_c = 0$  we find the formula of reference [1].

### 3. Numerical applications

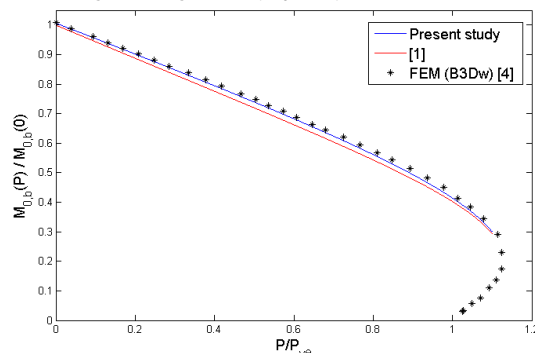
Effects of axial loads on beam lateral buckling resistance are studied using the proposed analytical lateral buckling solution, and the analytical solution of reference [1] for different values of the axial load  $P$ . These analytical solutions are compared to numerical simulations. Numerical solutions are obtained from B3Dw beam elements including warping implanted in a general home finite element package [2]. ANM path following technique is used to solve the non-linear equations. Two examples of beams with open-sections are presented. The geometrical and mechanical data are given in table 1.

	$L = 6m, h = 190, b = 200, t_w = 6,5,$ $t_f = 10(\text{in mm}), A = 41,7\text{cm}^2, z_c = 4,8 \text{ cm},$ $I_y = 2551,7\text{cm}^4, I_z = 750 \text{ cm}^4, \frac{I_z}{I_y} = 0,294,$ $I_\omega = 24,10^3 \text{ cm}^6, J = 11,65 \text{ cm}^4, \beta_z = 6,0 \text{ cm},$
	$L = 6m, h = 120, b = 140, t_w = 8,$ $t_f = 10\text{mm}, A = 31,7\text{cm}^2, z_c = 3,3\text{cm}.$ $I_y = 913,82, I_z = 666,67\text{cm}^4, \frac{I_z}{I_y} = 0,729,$ $I_\omega = 212,22\text{cm}^6, J = 8,31\text{cm}^4, \beta_z = 5,8\text{cm}$

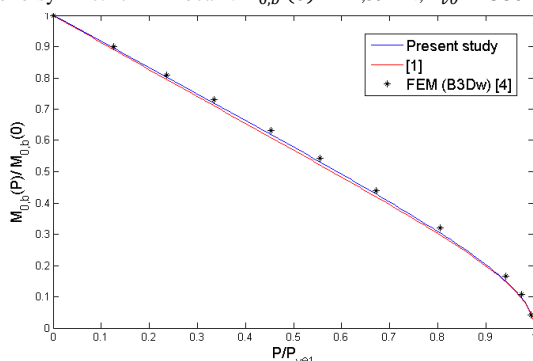
**Table 1:** Dimensions and geometric characteristics of these sections

Steel material is considered with  $E = 210\text{GPa}$  and  $G = 80,77\text{GPa}$ . We plot in figures 2 and 3, the solution curves giving the  $\overline{M}_{0,b}(\overline{P})/\overline{M}_{0,b}(\overline{0})$  ratio as a function of the  $\overline{P}/\overline{P}_{v\theta}$  ratio obtained respectively by the analytical formula proposed in this work, the analytical formula of reference [1] and a non-

linear calculation by finite element [4]. We denote  $\overline{P}_{v\theta}$  the solution carried out from nullity of determinant of system of equilibrium equations when only linear terms are considered and vanishing bending loads ( $M_0 = 0$ ).



**Fig.2:** Axial forces effects on higher lateral buckling resistance of mono-symmetric HEA beam.  $M_{0,b}(0) = 114,59\text{KN}$ ,  $P_{v\theta} = 380\text{KN}$ .



**Fig.3:** Axial forces effects on higher lateral buckling resistance of mono-symmetric C beam.  $M_{0,b}(0) = 60,53\text{KN}$ ,  $P_{v\theta} = 353\text{KN}$

Analytical solutions have been validated for different values of the axial load  $P$ . On these first tests, and as we can see in figures 2 and 3, we have thus validated this analytical formula which contains additional terms. It remains to use this formula for other cases of sections and other boundary conditions.

### 4. Conclusion

The present analytical solution, for buckling and lateral buckling interaction, has been developed from a non-linear model including pre-buckling deflections, bending load distribution and load height level. This solution is more general and constitutes an original contribution to the stability of beam-column elements. The present solution has been validated and discussed when compared to finite element results.

### References

- [1] F. Mohri, N. Damil, M. Potier-Ferry, Buckling and lateral buckling interaction in thin-walled beam-column elements with mono-symmetric cross sections, Applied Mathematical Modelling, 37 (2013) 3526–3540.
- [2] V. Z. Vlasov, Thin-walled elastic beams, Moscow, 1959. French translation: Pièces longues en voiles minces, Paris : Eyrolles ; 1962.
- [3] F. Mohri, L. Azrar, M. Potier-Ferry, Flexural-torsional post-buckling analysis of thin-walled elements with open sections, Thin-Walled Structure 39 (2001) 907–938.
- [4] F. Mohri, N. Damil, M. Potier-Ferry, Large torsion finite element model for thin-walled beams, Computers & Structures 86 (2008) 671–683.

## EFFET DE L'ENROBAGE SUR L'INTERFACE ACIER BETON SOUS HAUTES TEMPERATURES

Z. Zenasni<sup>1</sup>, K. Nasri<sup>2</sup>, M. Haterbouch<sup>1</sup>, M. Zenasni<sup>3</sup>

1. Équipe de mécanique et ingénierie intégrée (M2I), ENSAM, Université Moulay-Ismaïl, Meknès, Maroc.
2. Université AbdelMalek Essaadi, ENSATE, Tétouan, Maroc.
3. Equipe de Mécanique et Calcul Scientifique, BP 669, ENSA, Oujda. Maroc

### Résumé

Lorsqu'une structure en béton armé et/ou en béton précontraint a été soumise à un incendie, il est souvent question de la maintenir debout, en raison des bonnes propriétés de résistance au feu du béton. Cela signifie, que face à de telle situation, un choix peut être fait entre la reconstruction et la réintégration. Souvent, la réintégration peut être l'alternative la plus rapide et la moins chère. Dans ce travail, nous allons réaliser des simulations numériques, en utilisant le logiciel Abaqus, de l'essai d'arrachement sous hautes températures en variant l'enrobage en béton. Le code utilisé pour la modélisation est basé sur le modèle Concrete Damage Plasticity 'CDP'. L'objectif est d'évaluer l'influence de l'enrobage sur l'adhérence acier béton.

**Mots clefs :** *Béton armé, simulations numériques, Abaqus, Concrete Damage Plasticity, enrobage.*

### 1. Introduction

Afin d'entamer la présentation de cette partie, nous allons exposer une partie des travaux Morley et Royles [1] qui ont réalisé des essais expérimentaux sur le comportement résiduel de l'interface acier-béton après son exposition aux hautes températures tout en intégrant la variation de l'enrobage comme paramètre d'étude et de réflexion.

#### 1.1 Généralités et procédé expérimental

Les auteurs ont pris des éprouvettes cylindriques en béton armé. La hauteur de chaque éprouvette est de 300 mm le diamètre varie selon la valeur de l'enrobage béton. La barre de renforcement est de 16 mm et elle est en interaction en partie centrale avec le béton sur une longueur de plus de 32 mm. Des lots de quatre spécimens ont été testés dans un four électrique. La charge peut être appliquée à l'extrémité de la barre d'armature qui s'étend à travers la base du four jusqu'à une commande de dispositif manuelle pour chargement hydraulique incorporent une charge de 50 kN. Afin de mesurer le glissement de la barre, un dispositif de mesure a été placé à l'extérieur de la zone de chauffe. Ceci a été réalisé en

utilisant des capteurs de déplacement qui sont connectés à deux graphiques à traces continues à six canaux d'enregistrements. La plage des températures fixées par les auteurs est de 20°C à 750°C. Ainsi, ils ont mis 4 conditions de tests et qui sont :

- Contrainte appliquée pendant le chauffage et chargement jusqu'à la rupture à température élevée ;
- Contrainte appliquée pendant le chauffage et chargement jusqu'à la rupture après refroidissement de l'éprouvette ;
- Pas de contrainte appliquée pendant le chauffage et chargement jusqu'à la rupture à température élevée ;
- Pas de contrainte appliquée pendant le chauffage et chargement jusqu'à la rupture après refroidissement de l'éprouvette.

La contrainte appliquée dans les conditions ci-dessus, est sous forme d'une contrainte de liaison appliquée en régime permanent de valeur de 3.7 N/mm<sup>2</sup> pendant le cycle de chauffage.

Morley et Royles ont testé, pour le cas d'enrobage d'une valeur de 55 mm, les 4 conditions citées. Aussi, 3 différentes valeurs d'enrobage (25, 32 et 46 mm) ont été testé sous la 2ème conditions.

#### 1.2 Observations expérimentales

Suite aux résultats obtenus, les auteurs ont distingué les effets de chaque condition d'essai. En effet, les éprouvettes chauffées avec application d'une contrainte au niveau de l'interface ont présenté des performances légèrement meilleures que celles chauffées sans application d'une contrainte. Cette conclusion, pour les auteurs, est conforme par rapport au comportement du béton soumis à une température élevée, vu qu'un pré chargement appliqué empêche et retarde la formation des fissures dans le béton et donc il contribue directement à l'augmentation de la performance de l'interface.

Les résultats obtenus, voir figure 1, pour les cas d'enrobages de 46 et 55 mm montrent que la contrainte de liaison maximale dépend directement de la résistance à la compression du béton au niveau de l'interface. Par contre, les courbes des cas d'enrobage de 25 et 32 mm, ont le même comportement de celles de la résistance en traction du béton, ce qui indique que la contrainte

maximale de liaison a été affectée, beaucoup plus, par les efforts de traction qui entoure le béton.

La partie en trait discontinu représente la chute de la contrainte d'interface qui, lors du chargement thermique de l'éprouvette, a atteint la rupture sans qu'elle aboutisse à la température  $T = 750^{\circ}\text{C}$ .

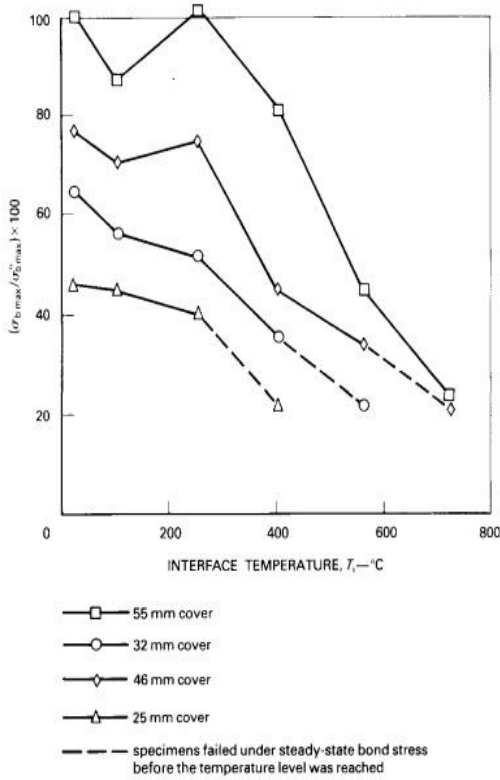


Figure 1 : Variation de la contrainte de liaison maximale avec la température pour différentes valeurs d'enrobage

Nous pouvons résumer les conclusions tirées des travaux de Morley et Royles dans points suivants :

- Le comportement au niveau de l'interface dans le cas des éprouvettes avec un enrobage important suit celui de la courbe de la résistance à la compression du béton avec des valeurs de glissements plus importantes qui indiquent une rupture de type arrachement du béton qui entoure les nervures ;
- Les éprouvettes avec faibles enrobages ont présenté des valeurs de glissement moins importantes et leurs comportements au niveau de l'interface suit celui du modèle de la courbe de résistance du béton à la traction qui traduit un mode de rupture par fendage ;
- La réduction de la résistance au niveau de l'interface par rapport à la température était plus grande que la réduction de la résistance à la compression du béton.

## 2. Essai d'arrachement

Le principe de la modélisation consiste à la simulation numérique de l'essai d'arrachement pour une éprouvette

en béton armé sous hautes températures et à des valeurs d'enrobages variables. L'essai se résume sur une première partie du traitement thermique suivi par en deuxième lieu par l'essai deuxième d'arrachement à température ambiante. Cependant, l'enrobage  $h_b$  varie d'un essai à l'autre et donc pour chaque cas de température (20, 150, 200, 300, 400 et  $500^{\circ}\text{C}$ ) nous procéderons à la simulation de l'essai d'arrachement pour différents cas d'enrobage. Les valeurs de l'enrobage  $h_b$  qui seront utilisées sont : 30, 35, 40, 45 et 50 mm. Les conditions aux limites appliquées sur le modèle sont présentées comme esquisse dans la figure 2 ci-dessous.

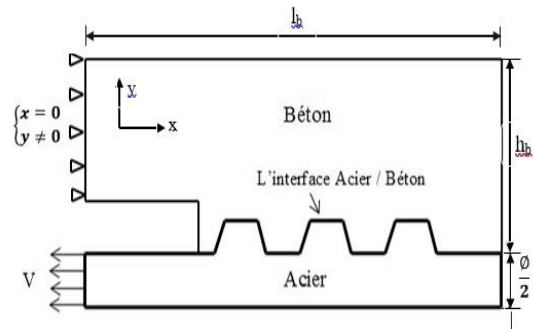


Figure 2 : conditions aux limites du modèle d'arrachement

Pour modéliser le comportement du béton à l'interface acier béton sous l'effet du chargement appliqué, nous avons utilisé le modèle CDP du code de calcul Abaqus. Le choix de ce dernier est dû à son efficacité et sa puissance dans le traitement du calcul numérique qui a été déjà approuvé dans plusieurs travaux à savoir, Jankowiak et al.[2], Ghosh et al.[3] et Zenasni et al.[4]. L'éprouvette a été modélisée par le type des éléments CPE4R : "4-Node bilinear Plane strain quadrilateral Reduced integration". Une étude de convergence de maillage a été réalisée au préalable pour identifier le maillage le plus approprié pour notre étude.

## 3. Résultats et discussion

Suite à la réalisation des simulations numériques, comme cela a été décrit dans la partie précédente, nous avons obtenu les résultats pour les différents cas de températures. Ci-dessous, nous présentons dans la figure 3, la figure 4 et la figure 5, les résultats pour les cas d'exposition de l'interface acier-béton à  $T = 20^{\circ}\text{C}$ ,  $200^{\circ}\text{C}$  et  $400^{\circ}\text{C}$ . Ces figures illustrent la force d'arrachement en fonction du déplacement pour différentes températures d'exposition avec variation de l'enrobage. La force d'arrachement gagne en valeur avec l'augmentation de la valeur de l'enrobage. Le même raisonnement est appliqué pour le glissement et donc les valeurs de la force d'arrachement et du glissement augmentent avec l'augmentation de l'enrobage. Dans les cas d'enrobages 30 et 35 mm, il est clair que la force d'arrachement, pour chaque cas, est faible ce qui influe

automatiquement la faible résistance au niveau de l'interface acier béton. Cette faiblesse, en termes de résistance, est due à l'influence de l'exposition aux hautes températures, surtout dans les cas de températures 400 et 500 °C, où la formation des fissures au niveau de l'interface acier béton commence à se propager.

Pour les cas d'enrobages 40 et 45 mm, la force d'arrachement est plus importante et donc cela impliquera une résistance considérable au niveau de l'interface. L'influence de l'effet de l'enrobage sur la résistance est clairement confirmée dans le cas de  $h_b = 50$  mm. La valeur de la force d'arrachement est au maximum dans l'ensemble des cas étudiés avec des valeurs de déplacements très intéressantes.

Ces résultats comparatifs traduisent l'importance de l'enrobage en béton, dans le cas d'une structure béton armé, pour avoir une bonne résistance au niveau de l'interface acier béton.

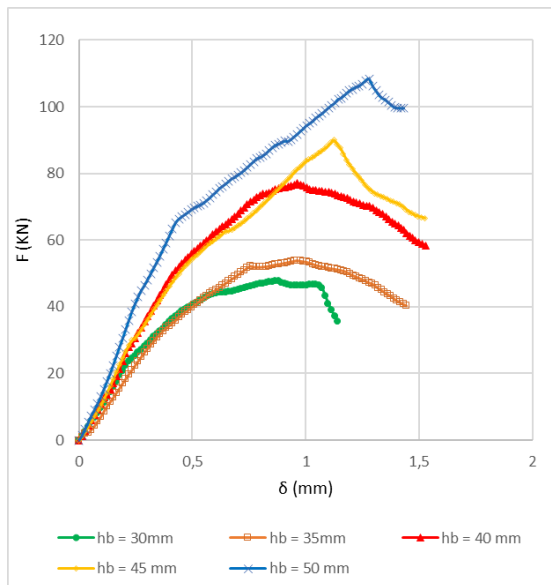


Figure 3 : Essai d'arrachement en fonction d'enrobage pour le cas de  $T = 20^\circ\text{C}$

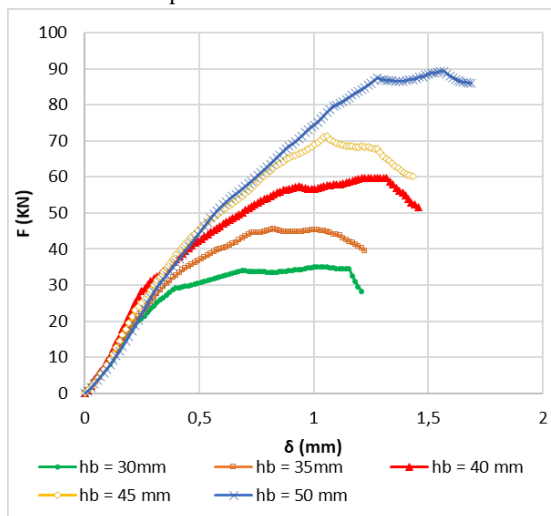


Figure 4 : Essai d'arrachement en fonction d'enrobage pour le cas de  $T = 200^\circ\text{C}$

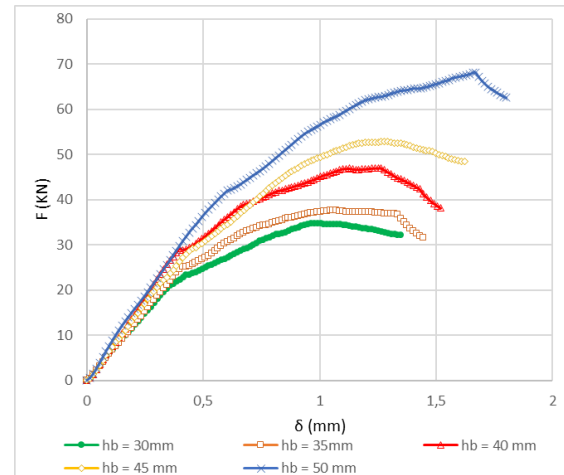


Figure 5 : Essai d'arrachement en fonction d'enrobage pour le cas de  $T = 400^\circ\text{C}$

#### 4. Conclusion

L'influence de l'enrobage sur le comportement de l'interface acier béton sous hautes températures, a été bien défini dans ce travail. Le gain en matière de performance de l'adhérence met en valeur la possibilité d'améliorer le comportement de l'interface acier béton en augmentant la valeur d'enrobage surtout pour faire face aux chargements thermiques. Les conclusions des travaux de Morley et Royles, sur le rôle de l'enrobage dans le comportement de l'interface, consolide les résultats numériques que nous avons obtenus.

#### Références

- [1] P. D. Morley, R. Royles, *Response of the bond in reinforced concrete to high temperatures*, Magazine of Concrete Research, vol. 35, pp. 67-74, 1983.
- [2] T. Jankowiak, T. Odygowski, *Identification of parameters of concrete damage plasticity constitutive model*, foundations of civil and environmental engineering, N°6, pp. 53-69, 2005.
- [3] A. Ghosh, *modeling the bond stress at steel-concrete interface for uncorroded and corroded reinforcing steel*, PhD thesis Ryerson University, 2011.
- [4] Z. Zenasni, M. Haterbouch, K. Nasri2, M. Zenasni, R. Addou, K. Hannawid, W. P. Agbodjand, *Numerical Simulation of Residual Behavior of Steel Concrete Interface after High Temperature Exposur*, Horizon Research Publishing, USA, Vol 9-3, pp. 625 – 633, 2021

**Thème 03 :**  
**Matériaux solides et composites**

# EXPERIMENT AND SIMULATION STUDY OF THE EFFECT OF FILLERS ON MECHANICAL PROPERTIES OF SUSTAINABLE COMPOSITE.

M. Zaini <sup>1,\*</sup>, M. Idiri <sup>2</sup>, M. Ait El Fqih <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratory of Artificial Intelligence & Complex Systems Engineering (AICSE), ENSAM, Hassan II University of Casablanca, Morocco.

<sup>2</sup>Laboratoire d'Ingénierie et Matériaux (LIMAT), Hassan II University of Casablanca, Morocco.

\* Corresponding author: mr.zainimohammed@gmail.com

## Abstract:

Jute fiber reinforced composites are currently being explored as possible advanced engineering materials. Therefore, the objective of this study is to investigate the mechanical characteristics of epoxy composites reinforced with jute fibers and steel fillers. In the present study, three types of the composite of two-way jute carpet and steel fillers were reinforced with epoxy, with different rates of each material. The mechanical properties (hardness, tensile strength) were evaluated. The experiment was combined with simulations and revealed that both of them were in a fairly good agreement.

**Keywords:** Jute Fiber, Composites epoxy, fillers, Mechanical properties, tensile test, Finite element

## 1. Introduction

Polymer composites reinforced with glass and carbon fibers have replaced many conventional materials since the middle of the last century [1]. In the current century, however, these synthetic fiber composites are being called into question due to issues related to environmental and energy issues [2]. Among the many natural fibers used as polymer composite reinforcement, that of jute extracted from *Corchorus capsularis* the plant is one of the most studied, which is composed of 60% cellulose, 22% hemicellulose and 16% lignin [3]. Jute fiber exhibits properties relevant for composite reinforcement, such as 393-773 MPa in tensile strength, 10-30 GPa in modulus of elasticity and a density of 1.44 g / cm<sup>3</sup> [4]. However, some properties of specific composites reinforced with jute fibers have yet to be evaluated. In particular, toughness is a relevant property for applications which might be associated with impact conditions [5]. The results of an experimental study on epoxy reinforced jute samples were presented by Oucht et al [6]. They show that composites with continuous and aligned jute fibers reinforcing an epoxy matrix exhibit a significant increase in toughness with terminal treatment of 80 °C. The values of the absorbed energy are among the highest. On the other hand, other experiment was carried out by the technique of manual lamination of an epoxy reinforced by different quantities of jute fibers (0%, 12%, 24%, 36% and 48%) by Vivek et al. [7] show that the minimum and maximum void content is pure epoxy and 12% fiber loading samples respectively. The study also

shows that the void content decreases with increasing fiber load. They prove that the hardness, tensile properties and impact resistance of jute-epoxy composites increase with increasing fiber load. They also show that properties such as flexural strength and shear strength are strongly influenced by the void content of composites. It was found that these properties reduced the fiber loading from 0wt% to 12wt% and that with the reduction in void content from 12wt% to 48wt%, the properties were improved [8].

This work presents a combined experimental and simulation study of a standard dimension specimen according to ISO3167 of epoxy reinforced by jute and loads of steel chips subjected to tensile strength at 2000N. This specimen was produced with similar loading conditions for the modeled specimen who is subjected to monotonic tensile loading on the first tool and embedding in the second tool until failure.

## 2. Materials and Method

The fillers chosen for our study are Entangled Elemental Chips, the steel shavings are made from premium quality steel. In this study, epoxy resin was used as the matrix material with a hardener. Polymer composites are made by a manual layering technique.

	Weight	JECF5	JECF7.5	JECF13.5
Matrix	(%)	73	7	70
	(g)	83	83	64
Fiber	(%)	22	22.5	16.5
	(g)	25	27	15
Fillers	(%)	5	7.5	13.5
	(g)	6	9	12.5
Total	(%)	100	100	100
	(g)	114	119	91.5

**Table 1.1:** Weight proportion

First, we start by mixing the hardener with the resin while using an electric mixer for a period of a few minutes. We cut the different jute bags manually with a scissor according to the dimensions of the mold. For this purpose, an open type boiling roller made of mild steel sheet was used. The eco-composites are impregnated at room temperature. For this, a Mylar sheet is placed on the bottom part of the mold for a good surface finish and easy removal of the composite from the mold in addition to the wax is also used to coat the surface of the Mylar sheet for easy removal of the composite of the Mylar sheet. After ¼ of the epoxy resin

has been deposited on the sheet and spread by a boiling roller. Then place the first burlap on the sheet and the second  $\frac{1}{4}$  of the resin is impregnated with the roller to remove air bulls. Then we put half of the load manually in a discrete way on top of the first layer. And then we repeat the same steps for the second and third layers. Then the samples are placed on or under a concrete cylinder of a large enough mass under special pressure to compress the jute fiber with the epoxy resin and fillers at room temperature. They left for 72 hours for curing. Finally, we tried to cut the prepared plates into test pieces first in parallelepiped form using a mechanical device, and afterwards in the form of dumbbells manually using a saw blade with respect to the direction of the molding according to the ISO3167 standard.

Numerical simulation was carried out using commercial finite element software Abaqus (CAE 6.13-1) with ISO3165 standard specimens. In this study the model selected for the cracks of the specimens is an isotropic elastoplastic static model because this technique has the potential to represent the complete inelastic behavior due to the specimen in tension. Similar loading conditions were achieved for the model specimen who is subjected to monotonic tensile loading on the first tooling and embedding in the second tooling until failure.

Our mesh choice fell on the first order hexahedral element (linear shape functions) at 8 nodes with a C3D8R reference, because it is very efficient for simple geometry problems. All the mechanical properties of the test specimen used in our simulation are obtained from our experience.

### 3. Result and Discussion

#### 3.1 Physical and Mechanical Properties

The theoretical density varies gradually, it decreases when the content of the fillers increases from 0% to 6% (see table 2.1). This is due to the decrease in the value of the density of the fillers. For the void fraction (in percentage) also note a decrease with the increase the content of the fillers increases from 0% to 6%, this explains the significant presence of vacuum in the Control sample (at 0% of the charged). Void formation in polymer composites can occur due to air entrapment during resin system preparation and moisture absorption during material processing or storage. It was calculated on the basis of the differences in theoretical and experimental densities for each composite.

Materials	Young's Modulus (MPa)	Tensile Strength (MPa)	Poisson ratio	Elongation at break (%)
JEFCT	430	12	0.3	3
JEFC 5	90	3	0.3	3.5
JETFC 7.5	100	3	0.3	4.5
JEFC 13.5	130	7	0.3	6

Table 2.1 : Mechanical properties of woven Jute Fiber

The hardness behavior of jute reinforced epoxy composites and steel chip fillers was performed using the Shore-A tester (Fig. 3.1). Five sets of values can be taken for each combination and their average value can be reported. In general, the surface hardness value decreases with the decrease in the percentage of added fillers from 13.5% to 5%.

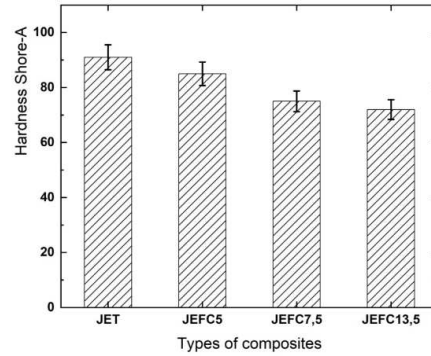
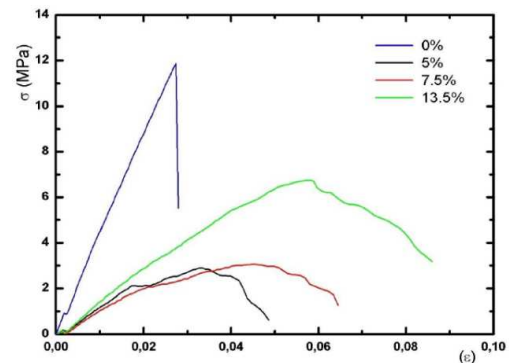


Figure 3.1: Shore-A typical density histogram

Indeed, the hardness behavior of the composite material depends on the type of reinforcement and its properties (physical, mechanical and chemical), the level of adhesion and the load of the fiber from these values, the JET composite has reached a maximum hardness of 91.5 Shore-A. The minimum hardness value is obtained from JEFC5 composite with 70.33 Shore-A value. This implies that the loadings of the steel chips are a weak adhesive with the jute/epoxy composite which increases the diameter of the impression left by the ball, and as a result the composite becomes less rigid and low resistance to the applied force. This explains why the jute/epoxy composite always reaches a higher hardness value than the composite which contains fillers.

Figure 3.4 depicts the evolution of the stress applied according to deformation of the test specimens taken for the same length of reference  $l_0$ , for various test specimens and for the four composites (JET, JEFC5, JEFC7.5 and JEFC13.5), in the case of static tests, requested in traction.

In the case of the different types of composite structure tested, the behavior in traction is similar and can be broken down into 3 main phases, namely:



**Figure 3.4:** Stress-strain curve of specimens

The evolution of the applied stress as a function of strain

An elastic linear part: with a slope that differs from one material to another, thus explaining on the one hand that the addition of the reinforcement stiffened the polymer matrix with steel loads (JET, JEFC5, JEFC7.5 and JEFC13.5) and on the other hand, this effect is not the same from one material to another. JET (unloaded) composite has the steepest slope compared to other composites, so it is the stiffest material. The second phase of nonlinear behavior, in which the maximum load is reached. This non-linear behavior is explained by progressive damage which is mainly due to the presence of the jute fabric. The determination of the modulus of elasticity  $E$  is done by measuring the slope of the linear elastic part of the stress-strain curve. The third and final phase where the appearance of matrix cracks before failure is at the origin of the nonlinearity of the behavior curves. A decrease in the applied load is observed until the test specimen is completely broken.

### 3.2 Simulation procedures

The evolution of the applied external loading leads to a significant evolution of the stress field in all composites. The stress field first appears in the region of the reference length, then it propagates with a very high speed according to inclined rods in the mortar core until failure. Towards the end of the loading the stress field is located at the level of the tools (wide zone), the speed of propagation of the stress field is greatly reduced. In the case of the epoxy composite reinforced with jute fabric without loads the stresses supported reach greater values than in the case of the composites belongs loads. For the latter, the stresses supported increase during the increase in the percentages of the loads (5%, 7.5%, 13.5%). The maps also show that the materials of the steel shavings are more stressed in tension if its content is increased. But they are a weak adhesive with jute/epoxy (Figure 3.5).

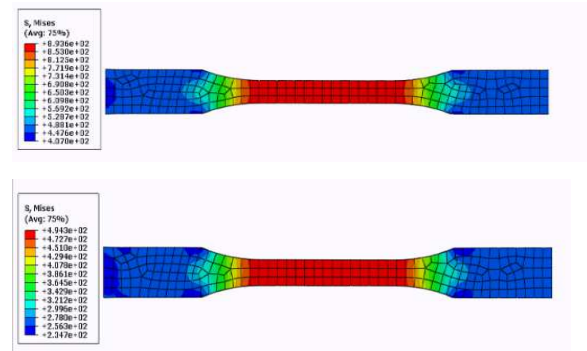
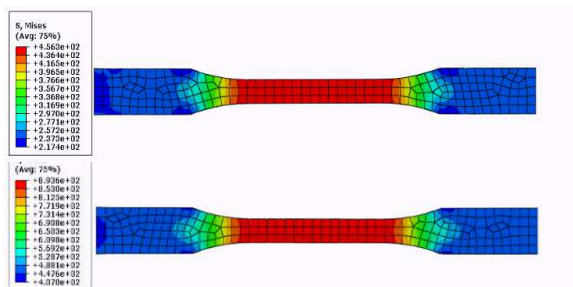


Figure 3.5: Stress evolutions in composites respectively JET, JEC F5, JEC F7.5 and JECF13.5

## 4. Conclusion

In this study, the effects of the process of filling steel chip fillers with different percentages on the mechanical, impact and hardness behaviors of the treated jute fabric reinforcing laminate composites were investigated. It was concluded from the results obtained that it has a drop in Young's modulus and tensile strength of the JEFC composite compared to the jute / epoxy composite, with an increase in these last two properties during the increase in the percentage of charges added. On the contrary, there is a progressive increase in the elongation at break of composites with the increase in the percentage of fillers (from 0% to 13.5%).

## References

- [1] J. Chafiq, I. Oucht, M. Ait El Fqih, , Materials Today:Proceedings,2021,
- [2] K. Manohar Reddy, B. Chandra Mohana Reddy, Materials Today: Proceedings, (2020), 5
- [3] S. Velu, J.K. Joseph, M. Sivakumar, V.K. Bupesh Raja,K. Palanikumar, N. Lenin, Materials Today: Proceedings, (2021), 1-6
- [4] M. Dhinesh Kumar, C. SenthamaraiKannan, S. Jayasrinivasan, Materials Today: Proceedings, (2020), 1-4
- [5] N. Karthi, K. Kumaresan, S. Sathish, L. Prabhu, S. Gokulkumar, D. Balaji, N. Vigneshkumar,S. Rohinth, S. Rafiq, S. Muniyaraj, S. Pavithran, Materials Today: Proceedings, (2021), 1-5
- [6] I. Ouchte, M. Ait El Fqih, J. Chafiq, R. Matadi Boubimba, A. Mikdam, H. Chakir, , Composites theory and practice, 21: 3 (2021) 102-106
- [7] Vivek Mishra, Sandhyarani Biswas, Civil and Mechanical Engineering Tracks of 3rd Nirma University International Conference on Engineering (NUICONE 2012), 1-6
- [8] A. C. Pereira, S. N. Monteiro, F. M. Margem, F. S. D. Luz, F. D. O. Braga, Charpy impact tenacity of epoxy matrix composites reinforced with aligned jute fibers (2017), 1-5



## Effect study of rhenium addition on hardness and elastic modulus of tungsten-rhenium alloy by molecular dynamics simulation

T.Karafi<sup>1</sup>, A.Tahiri<sup>2</sup>, M. Idiri<sup>1</sup>, B.Boubeker<sup>1</sup>

<sup>1</sup>LIMAT Laboratory, Faculté des Sciences Ben M'Sik, University Hassan II of Casablanca, Morocco.

<sup>2</sup>LPAIS Laboratory, University of Sidi Mohamed Ben Abdellah, B.P. 1796 Fès-Atlas, 30003 Morocco.

E-mail : karafi.toufik9@gmail.com

### Abstract:

In this work we performed a series of nanoindentation tests on Tungsten-Rhenium alloys, using Molecular Dynamics simulations and Embedded Atom Method (EAM) potential via Large-scale Atomic/Molecular Massively Parallel Simulator (LAMMPS). We studied on the one hand the addition of Re in the range of 0% to 25%Re on hardness and elastic modulus with a penetration rate of 3Å/ps and temperature as 300K for all four concentrations of Re. We found a decrease in reduced elastic modulus  $E_r$  and the hardness  $H$  with the increase in concentration of Re. The found results are in good agreement with the literature.

### Résumé :

Dans ce travail, nous avons effectué une série de tests de nanoindentation sur des alliages de tungstène-rhénium, en utilisant des simulations de dynamique moléculaire et le potentiel de la méthode des atomes intégrés (EAM) via un simulateur atomique/moléculaire massivement parallèle (LAMMPS). Nous avons étudié d'une part l'ajout de Re dans la gamme de 0% à 25% de Re sur la dureté et le module d'élasticité avec un taux de pénétration de 3Å/ps et une température de 300K pour les quatre concentrations de Re. Nous avons trouvé une diminution du module d'élasticité réduit  $E_r$  et de la dureté  $H$  avec l'augmentation de la concentration de Re. Les résultats trouvés sont en bon accord avec la littérature.

**Mots clefs :** *Tungstène, Alliage Tungstène-Rhénium, Nanoindentation, simulations de dynamique moléculaire, Propriétés mécaniques, mécanismes de défauts, dureté, module d'élasticité.*

**Keywords:** *Tungsten, Tungsten-Rhenium alloy, Nanoindentation, molecular dynamics simulations, Mechanical properties, defect mechanisms, hardness, elastic modulus.*

### 1 Introduction

W-Re alloy has been investigated by many research interests during the past years, because used wider

application, electronic machine, bio-pharmaceutical, and other fields [1,2] but the applications of tungsten and its alloys have been limited to a great extent by their brittleness at ambient temperatures. The objective of our work decreases the brittleness in the tungsten through the addition of rhenium. When rhenium is added to tungsten, tungsten becomes ductile at an ambient temperature of 300K .nanoindentation testing is a simple method that consists principally of touching the material of interest. Among of mechanical properties is hardness, elastic modulus and defect mechanisms. It is not only used to gather information about the elastic modulus and hardness of a material [3,4]. The combination of the modern experimental testing method with the Oliver-Pharr [5] analysis has led to a widespread utilization of nanoindentation testing.

Molecular Dynamics MD is a simulation tool used to understand the properties of molecule assemblies based on their structure and microscopic interactions with each other [6], where Embedded Atomic Method (EAM) as an interatomic interaction potential was used [7].

In this work, we carried out a series of nano indentation tests on W-Re alloy single crystal samples, using simulation by the method of molecular dynamics with the interaction potential (EAM) to study the effect of addition of rhenium (Re) on the mechanical behavior and the structure proprieties of W.

### 2 Methodology

#### 2.1 Interatomic Potentials

In MD simulations, the choice of interatomic potential function is very important. The potential of the integrated atomic method describes the energy between the two atoms present. Energy is a sum of functions of separation between atoms and its neighbors. Thun; It was developed by Daw and Baskes (1984) [8] to study the defects of metals. The total energy ( $E_{tot}$ ) of a system N atom is given by:

$$E_{tot} = \sum_i F_i(\rho_i) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \varphi_{i,j}(r_{i,j}), \rho_i = \sum_{j \neq i} f_i(r_{ij}) \quad (1)$$

Where E is the total energy of the system,  $\varphi_{(i,j)}(r_{i,j})$  represents the pair interaction energy between an atoms i and its neighboring atom j,  $f_i(r_{ij})$  is the electronic density

function, and  $F_i(\rho_i)$  represents an embedding function accounting for the effects of the free electrons in the metal [9].

## 2.2 Sample Preparation

In this paper, all the simulations are carried out by using an open code LAMMPS [10] from the view of MD simulations using the (EAM) potential by Bonny and Bakaev [11] is used to study the structural behavior of W and  $W_{(100-x)}\text{Re}_x$  alloys with  $x=5,10$  and 25 at%. The simulation model is shown in Fig. 1. the MD model investigated in this study consisted of the spherical diamond indenter ( $30\text{\AA}$  radius), the size of the simulation box is  $200*200*200\text{\AA}^3$ , consisting of 512191 atoms as a single crystal of the Cubic Body Center Structure (BCC), Periodic boundary conditions were used in the lateral direction (x and y) and a free surface in the indenting direction (z), using a time step of 1fs, In addition, three types of atoms are used to construct the simulation box : fixed atoms, thermostat atoms and Newtonian atoms. The lower layer of atoms in the substrate is kept fixed in space, and the layer adjacent to them is fixed at a constant temperature of 300K, The indenter velocity is set to be  $3\text{\AA}/\text{ps}$ . To visualize and analyze the MD simulation result, we is used the OVITO software [12].

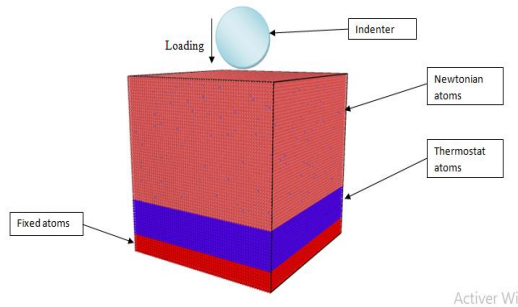


Fig.1 Simulation model of the nanoindentation process.

## 3 Results and discussions

### 3.1 Effect of addition of Re on hardness and elastic modulus

The various concentrations of Re used for the process of nano-indentation are W-0%Re, W-5%Re, W-10%Re, and W-25%Re. The dimension of box is kept fixed as  $200\text{\AA}*200\text{\AA}*200\text{\AA}^3$  as mentioned earlier. Along with that, the loading rate is kept fixed as  $3\text{\AA}/\text{ps}$  and temperature as 300K for all Re concentrations.

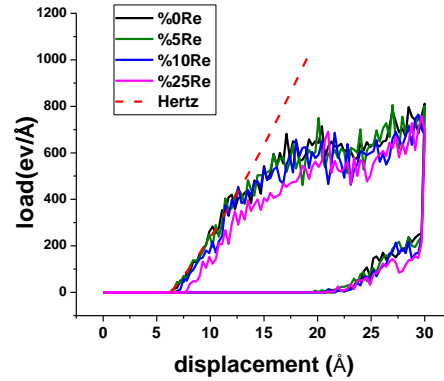


Fig.2: Load-Displacement curves of varying Re concentration.

The force-displacement curves obtained from the nanoindentation test during molecular dynamics simulation at a temperature of 300 K for various Re concentrations are shown in Figure 2. The maximum force of indentation decreases in the order of W-0%Re, W-5%Re, W-10%Re and W-25%Re. The strength of the alloy decreases with decreasing maximum force.

The fluctuation increases with Re concentration increasing. This is attributed to the stronger vibration of the atoms in the interaction area between the indenter and the substrate. Adhesive contact occurs as the load value becomes negative, due to the attraction between the substrate atoms and the indenter atoms. However, the period of adhesive interaction decreases with decreasing Re concentration. This result explains by increases the ductilization with Re addition [13].

In these plots, it may be noted that the rigid indenter travelled  $6\text{\AA}$  to reach the (relaxed) surface level of the specimen and then advanced by a further  $22.5\text{\AA}$  so that it achieved a total of  $30\text{\AA}$  displacement with a velocity of  $3\text{\AA}/\text{ps}$ . The exact position of the contact depended on substrate relaxation under tip-sample interactions.

We used the Oliver and Pharr method [14] was applied to obtain the value of Reduced elastic modulus  $E_r$  for an indentation depth of  $13\text{\AA}$  to compare different Re concentrations.

The indenter force was get from an average of the instantaneous indenter force over the last 100 fs before the indenter is moved down. The force in hertzian theory is given by:

$$F = \frac{4}{3} (K.h^{\frac{3}{2}}), K = E_r.R^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

Where R the radius of the indenter ( $30\text{\AA}$ ), K is the slope of the curve, h is the indentation depth and  $E_r$  is the reduced elastic modulus given by:

$$E_r = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (3)$$

The hardness, H, is given by:

$$H = \frac{F_{\max}}{A} \quad (4)$$

Where  $F_{\max}$  is the maximum load and  $A$  is the projected contact area, calculated using the following equation [4]:

$$A = 2\pi R h_{\text{res}} \quad (5)$$

Where  $R$  is the radius of the indenter and  $h_{\text{res}}$  is the residual depth.

The calculated results of the reduced elastic modulus and the hardness for four sizes of grains are listed in table 1

%Re	0%Re	5%Re	10%Re	25%Re
Er (GPa)	350	329.07	322.66	307.28
H (GPa)	35.8	35.44	32.3	31.9

Table: 1 reduced elastic modulus and Hardness measurements (GPa), for all concentrations.

From table 1, it may be observed that the values of  $E_r$  both vary considerably; this shows that the reduced elastic modulus decreased with the increased of the concentrations. These results are in agreement with the experimental values at 286 K, 300–414 GPa [15].

Hardness measurements for our simulations, using Eqs (4) and (5) are presented in Table 1. Typically, hardness decreased with the increased of the Re concentrations, and reaches a value around 31.9–35.8 GPa, On the other hand, the hardness value 35.8 GPa, found for the W-0%Re sample is close to that of W (36 GPa) [16].

#### 4 Conclusions

In this study, MD simulation was used to study the effect of Re concentration by nanoindentation test on the of W-Re alloys. The study of the mechanical properties of W-Re alloys made it possible to draw the following conclusions:

- 1) The Reduced elastic modulus and the hardness of the W-Re alloy decreased with increasing Re concentration.
- 2) The Re additions contribution to the increase of W ductility.

#### Références:

- [1] Tian, B., Yu, Q., Zhang, Z., Du, Z., Ren, W., Shi, P., & Jiang, Z, Effect of magnetron sputtering parameters on adhesion properties of tungsten-rhenium thin film thermocouples, *Ceramics International* (2018).
- [2] Abdellah Tahiri, Mohamed Idiri, Brahim Boubeker ,Mechanical Behaviors of Tungsten-Rhenium Alloy Single Crystals from 77K to 300K - Atomic Simulation Study. *International Journal of Engineering Research in Africa*, 177-181(2020).

- [3] A.C. Fischer-Cripps, *Nanoindentation*, Mechanical Engineering Series, 2nd edition, Springer, New York, (2004).

- [4] R. Armstrong, W. Elban, S. Walley, *Int. J. Mod. Phys. B* 27 (08), (2013).

- [5] W.C. Oliver, G.M. Pharr, *J. Mater. Res.* 7 (06) 1564–1583, (1992).

- [6] H.A. Wu, X.X. Wang, X.G. Ni, *Acta. Meta. Sin.* 38 1219–1222, (2002).

- [7] G. Bonny, A. Bakaev, D. Terentyev, and Yu. A. Mastrikov, Interatomic potential to study plastic deformation in tungsten-rhenium alloys, *J. Appl. Phys.*, 121, 165107, (2017).

- [8] Daw MS and Baskes MI. Embedded-atom method—derivation and application to impurities, surfaces, and other defects in metals. *Phys Rev B* ;29:6443-6453, (1984).

- [9] Finnis M. *Interatomic Forces in Condensed Matter*. Oxford University Press, 129-186, (2003).

- [10] S. Plimpton, Fast parallel algorithms for short range molecular dynamics, *J. Comput. Phys.* 117 1–19, (1995).

- [11] G. Bonny, A. Bakaev, D. Terentyev, and Yu. A. Mastrikov, Interatomic potential to study plastic deformation in tungsten-rhenium alloys, *J. Appl. Phys.* 121, 165107, (2017).

- [12] A. Stukowski, Visualization and analysis of atomistic simulation data with OVITO—the Open Visualization Tool, *Model. Simul. Mater. Sci. Eng.* 18-15012, (2009).

- [13] Romaner, Lorenz; Ambrosch-Draxl, Claudia; Pippan, Reinhard. Effect of Rhenium on the Dislocation Core Structure in Tungsten. *Physical Review Letters*, 104(19), 195503, (2010).

- [14] Kan, Qianhua; Yan, Wenyi; Kang, Guozheng; Sun, Qingping. Oliver–Pharr indentation method in determining elastic moduli of shape memory alloys—A phase transformable material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 61(10), 2015–2033, (2013).

- [15] C. Volker, C.R. Claus, P. Jorg, N. Merten, A. Oliver, B. Klemens, H. Matthias, W. Jochen, M. Srdjan, J.S. Andrew, W.H. Achim, Molecular dynamics simulation of temperature effect on tensile mechanical properties of single crystal tungsten nanowire, *J. Nanomater.* 638947 1–9, (2008).

- [16] Goel, Saurav; Cross, Graham; Stukowski, Alexander; Gamsjäger, Ernst; Beake, Ben; Agrawal, Anupam. Designing nanoindentation simulation studies by appropriate indenter choices: Case study on single crystal tungsten. *Computational Materials Science*, 152, 196–210, (2018).

# CONCEPTION INNOVANTE D'UN MOULE RTM POUR L'INDUSTRIE AUTOMOBILE

## AN INNOVATIVE DESIGN OF RTM MOLD FOR AUTOMOTIVE INDUSTRY

A. OUEZGAN, S. ADIMA, A.MAZIRI, E. MALLIL, J. ECHAABI

Équipe de Recherche Appliquée sur les Composites, le Management, et l'Innovation, Département de Génie Mécanique, ENSEM, Université Hassan II De Casablanca, BP 8118, Oasis, Casablanca, Maroc.

ahmed.ouezgan@ensem.ac.ma

### Abstract

The resin transfer molding (RTM) is the most recognized process in the Liquid Composite Molding (LCM) family. Despite its several advantages, the application of this process is limited in the automotive sector as a consequence of multiple requirements and constraints dictated by this industry. The main objective of this article is to propose and discuss a novel design of RTM mold for the automotive sector. This innovation is achieved by applying the TRIZ theory (theory of inventive problem solving), in order to eliminate the conflict links that exist between the requirements of this sector.

### Résumé

Le moulage par transfert de résine (RTM) est le procédé le plus reconnu de la famille de moulage des composites par voie liquide (LCM). Malgré ses nombreux avantages, l'application de ce procédé dans le secteur automobile reste limitée à cause des exigences et des contraintes dictées par ce domaine. L'objectif de cet article est de proposer et discuter une conception innovante du moule RTM destinée au secteur automobile. L'innovation est obtenue par l'application de la théorie TRIZ (théorie de la résolution de problèmes inventifs), qui permet d'éliminer les liens conflictuels existant entre les exigences de ce secteur.

**Mots clefs:** RTM, LCM, TRIZ, Automobile.

**Keywords:** RTM, LCM, TRIZ, Automotive.

### 1. Introduction

Les matériaux composites ont connu une grande évolution durant ces dernières années. Aujourd'hui, l'application des composites est de plus en plus fréquente dans les différents secteurs industriels, tel que l'industrie de sport et loisirs, la médecine, les travaux publics, l'automobile et l'aéronautique. Ce succès, a des raisons technologiques, économiques et environnementales [1].

En raison de leur besoin d'assurer une cadence de production élevée, les fabricants d'automobiles s'orientent vers l'utilisation des procédés de la famille de moulage par injection de résine, dont le RTM constitue le procédé principal. Les autres procédés comme, VARTM, RTM-light, CRTM et Injection Flexible sont des variantes de ce procédé. Malgré leur avantage, l'emploi des composites dans ce secteur reste limité à des petites pièces en raison des difficultés d'automatisation de la production et des coûts d'outillages utilisés qui augmentent avec la taille de la pièce fabriquée.

Nous proposons l'utilisation de la théorie TRIZ, pour éliminer les contradictions et les conflits qui existent entre ces critères (paramètres du procédé) de façon radicale et innovante, afin de concevoir un procédé convenable pour le secteur automobile.

### 2. La théorie TRIZ

TRIZ est un acronyme Russe de théorie de résolution des problèmes inventifs, inventé par Guenrich Altshuller en 1946. C'est une méthodologie, un outil de génération d'idées dans la résolution des problèmes inventifs. Il permet aux inventeurs de formuler les problèmes et les contradictions pour trouver des solutions innovantes aux problèmes rencontrés [2].

Cette théorie comporte plusieurs outils qui servent à analyser le problème sans subir l'inertie psychologique (les habitudes, le jargon du métier, l'expertise dans un domaine professionnel) afin de générer des idées innovatrices. L'application de TRIZ se fait en suivant les démarches présenter dans le schéma 1.

### 3. Le procédé RTM

#### 2.1 La mise en œuvre d'une pièce par le procédé RTM

La fabrication d'une pièce composite par le procédé RTM se fait généralement en 5 opérations selon l'ordre suivant [3] :

Etape 1 : Préformage et drapage du renfort.

Cette première étape consiste à préparer le moule pour la mise en place du renfort fibreux sec.

Etape 2 : Fermeture et préchauffage du moule.

Etape 3 : Injection de la résine et Remplissage du moule.  
 Etape 4 : Polymérisation (réticulation) de la résine.  
 Etape 5 : Démoulage.

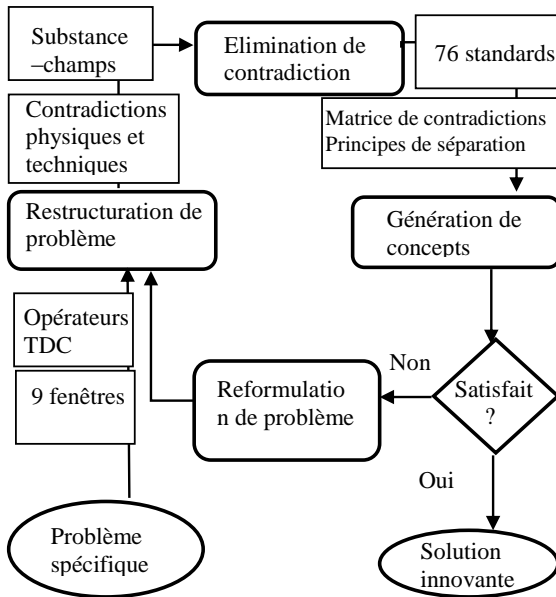


Figure 1. Schéma d'application de la théorie de résolution des problèmes inventifs

### 3.2 Analyse fonctionnelle externe

Cet outil est utilisé pour identifier les contraintes et les fonctions de service liées au système.

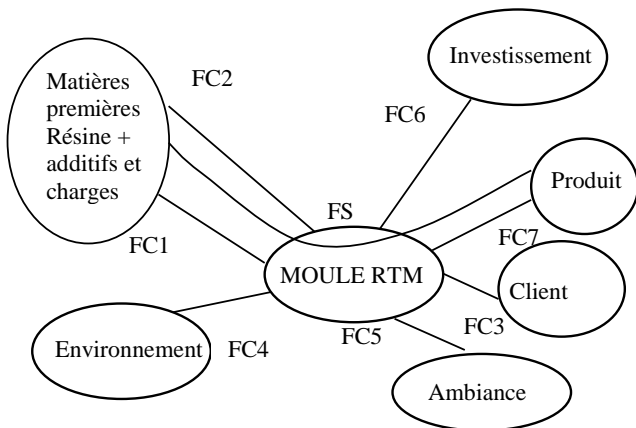


Figure 2. Analyse fonctionnelle externe

- FS: Transformer la matière première au produit souhaité.
- FC1: Injecter et remplir rapidement le moule sans aucune fuite de résine.
- FC2: Compacter uniformément les fibres (préforme).
- FC3 : être rentable.
- FC4: Résister à un environnement agressif (poussière, bruit, humidité et autres environnements industriels).
- FC5 : Ne pas polluer l'environnement (bruit mécanique, émissions chimiques (styrène)).
- FC6 : Ne pas nécessiter un investissement élevé.
- FC7 : Donner une bonne qualité de pièce et une bonne surface finale.

### 3.2 Décomposition structurelle

Cet outil est utilisé pour identifier tous les composants du système et leurs fonctions. Le schéma suivant montre les différents composants de moule RTM.

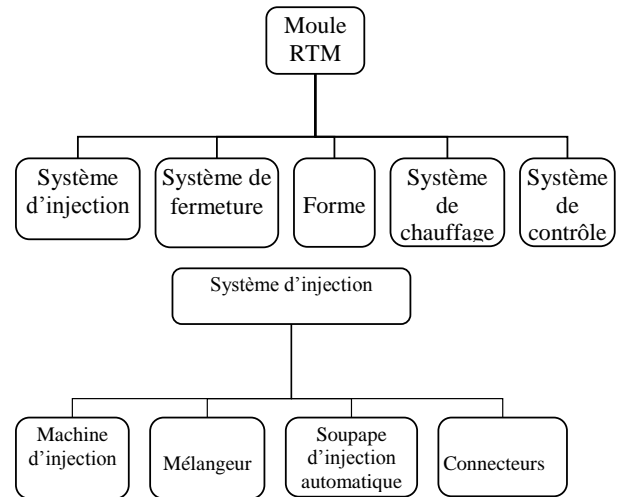


Figure 3. Décomposition structurelle du moule RTM

**Système de fermeture** : Permet de fermer le moule, d'assurer une meilleure étanchéité entre le moule et le contre-moule afin d'éviter les fuites d'air-résine, ainsi que d'obtenir un compactage de fibre uniforme.

**Machine d'injection** : Permet de stocker et de transférer la résine et les additifs, à partir de leurs réservoirs séparés vers la cavité du moule.

**Mélangeur** : Permet de mélanger la résine avec les charges et les additifs, aussi de donner à l'utilisateur un outil pour contrôler et modifier la vitesse de réaction dans le moule.

**Système de chauffage (régulation thermique)** : Permet de chauffer la résine et le moule, de contrôler la vitesse d'imprégnation de la résine pendant la phase d'injection ainsi que la réaction de polymérisation dans l'étape de polymérisation.

**Moule** : Permet de transformer la matière première au produit souhaité.

**Port d'entrée** : Permet l'entrée de la résine

**Port de sortie** : Permet d'évacuer l'air contenu dans la cavité du moule aussi que la pression excessive dans le moule.

**Système de contrôle**: rassemble tous les éléments et les outils permettant de mesurer les variables de processus.

### 3.3 Schéma fonctionnel

Cet outil est utilisé pour identifier le flux fonctionnel du système. Le schéma fonctionnel sera présenté à la conférence.

### 3.4 Analyse causale

Cet outil est utilisé pour identifier les ressources utiles et nuisibles du système et de son environnement, puis d'extraire les liens qui existent entre eux.

Les ressources sont tout apport : matériel, énergétique, informationnel, conceptuel, susceptible de contribuer à concevoir une solution pertinente.

**Ressource utile** : Génère des effets bénéfiques pour le système. Les ressources utiles au RTM sont :

1. Moule rigide
2. Fabrication des pièces de grande taille
3. Vitesse d'imprégnation de la résine
4. Temps de cycle

**Ressource nuisible** : Cause et produit des effets négatifs pour le système. Ces ressources sont :

1. Fuite d'air-résine
2. Déformation de la paroi du moule

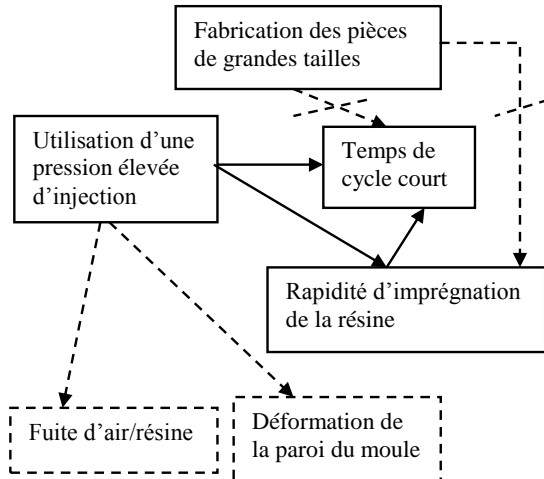


Figure 4. Analyse causale du moule RTM

### 3.5 Résultat idéal final

Dans le secteur automobile, un temps de cycle court et des équipements moins coûteux sont des critères clés pour déterminer un procédé approprié.

Le temps de cycle nécessaire à la fabrication d'une pièce est critique dans l'optique d'une fabrication de masse. Il dépend de la rapidité d'injection de la résine mais aussi de sa polymérisation [4].

A travers les recherches bibliographiques [5] liées au secteur automobile. Un moule idéal pour la fabrication des pièces automobiles doit remplir les critères suivants :

1. Utilisation d'un système de régulation thermiques (chauffage / refroidissement par zone).
2. Utilisation une faible pression d'injection.
3. Un débit élevé.
4. Une viscosité faible.
5. Une perméabilité élevée.
6. Un taux de fibre élevé.
7. Une cuisson rapide.

### 4. Génération des concepts des solutions

L'utilisation de l'analyse causale nous a permis d'extraire les contradictions physiques (CP) suivantes :

1. **CP1** : La fabrication d'une pièce de grande taille devrait exister pour satisfaire au besoin de l'industrie et ne devrait pas exister parce qu'elle contredit la rapidité d'imprégnation de la résine et le temps de cycle court.
2. **CP2** : la pression/débit d'injection devrait d'être élevé pour réduire le temps de cycle et accélérer l'imprégnation de la résine mais ne

devrait pas être grande (élevé) parce qu'elle cause la déformation de la paroi du moule, des fuites d'air et résine et augmente le coût d'outillage.

Ces contradictions physiques seront transformées en contradictions techniques, puis nous avons utilisé la matrice de contradictions afin de générer des solutions. La figure.5 illustre le processus de génération des solutions par l'application d'analyse causale.

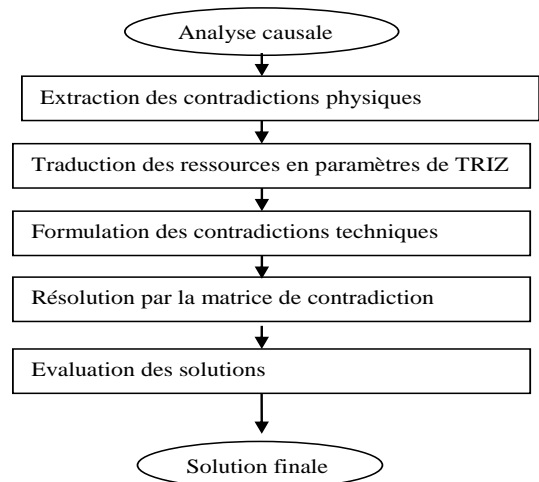


Figure 5. Méthodologie de résolution de problème par analyse causale

### Conclusion

L'application de la théorie TRIZ au procédé RTM permet d'identifier et d'éliminer les contradictions entre les paramètres gouvernant la mise en œuvre des pièces composites par le procédé RTM, puis de proposer des principes d'innovations qui seront par la suite traduits, afin de concevoir des moules innovants destinés au secteur automobile.

### Références

- [1] Y. Ledru, *Etude de la porosité dans les matériaux composites stratifiés aéronautiques*, Thèse, Université De Toulouse, 2009.
- [2] D. Zouaoua, *Lois d'évolution de TRIZ pour la conception des futures générations des produits : proposition d'un modèle*, Thèse, ParisTech, 2012.
- [3] P. Simacek, S.G. Advani, *Modeling Flow in Compression Resin Transfer Molding for Manufacturing of Complex Lightweight High-Performance*, Journal of COMPOSITE MATERIALS, Vol. 42, No. 23, 2008.
- [4] F. Cloutier, *Analyse des conditions de fabrication en pression et température dans les procédés d'injection par transfert de résine*, Thèse, Université De Montréal, 2010.
- [5] H. Song, *Study on high-speed RTM to reduce the impregnation time of carbon/epoxy composites*, Composite Structures 119 (2015) 50–58, 2015.

## L'effet du rapport Portée-Epaisseur sur la Rupture Interlaminaire dans un Composite Stratifié Unidirectionnel en Carbone/Epoxyde

M. BELLAHKIM<sup>1\*</sup>, Y. BENBOURAS<sup>1</sup>, K. KIMAKH<sup>1</sup>, A. MAZIRI<sup>1</sup>, EL. MALLIL<sup>1</sup>, J. ECHAABI<sup>1</sup>

Equipe de Recherche Appliquée sur les Composites, le Management et l'Innovation (ERACMI), ENSEM, UH2C, Casablanca, Maroc

\*[mouad.bellahkim@ensem.ac.ma](mailto:mouad.bellahkim@ensem.ac.ma)

### Résumé

La rupture interlaminaire, appelée aussi le délaminage, est considérée parmi les ruptures catastrophiques qui se produisent dans les composites stratifiés suite à des contraintes interlaminaires élevées. Ce travail a pour objectif de présenter une étude expérimentale de l'effet du rapport portée-épaisseur ( $l/h$ ) sur l'endommagement interlaminaire dans les composites stratifiés en carbone/époxyde sous l'essai de la flexion trois points. Pour ce nous avons utilisé un microscope électronique portable pour faciliter le suivi de l'endommagement au cours du chargement. Les observations microscopiques montrent que le délaminage accompagné par un flambement des fibres est un mode d'endommagement principal pour des valeurs  $l/h$  relativement faibles.

**Mots clefs :** *Délaminage, essai de la flexion trois points, composite stratifié.*

**Keywords:** *Delamination, three points bending test, composites laminates*

### 1. Introduction

Le matériau composite stratifié en carbone/époxyde est très répandu dans les applications où la réduction de masse est critique. Plus l'utilisation d'un matériau est élargie, plus la probabilité de rupture éventuelle est augmentée. La capacité à caractériser les ruptures, par exemple en termes d'identification des modes de rupture, des paramètres caractéristiques, ou des valeurs critiques à la rupture, est essentielle pour assurer l'intégrité des pièces en service et pour la conception des futurs produits [1]. La rupture des composites stratifiés peut se produire de plusieurs façons très complexes. Les modes de rupture dépendent de la stratification et de la direction du chargement par rapport à l'orientation des fibres et également des paramètres géométriques comme le rapport portée-épaisseur ( $l/h$ ). Echaabi et Al [2] ont étudié l'effet du rapport  $l/h$  sur le comportement en flexion d'un stratifié unidirectionnel quasi-isotrope. Benbouras et Al [3, 4] ont examiné

expérimentalement et analytiquement le comportement en flexion d'un stratifié tissu ( $[45/0]_{2s}$  et  $[0/90]_6$ ). Les contraintes hors-plan conduisent à l'amorçage du délaminage dans l'interface à cause de la différence des propriétés élastiques des plis adjacents [5]. La séquence d'empilement fait partie des principaux paramètres qui influencent l'apparition du délaminage près des bords libres. CZARNEK [6] et Herakovich [7] ont utilisé la technique du moiré sur le bord libre d'un stratifié symétrique désigné  $[(\theta n/-\theta n)]_s$  où  $n = 2$  et  $\theta = 10^\circ, 25^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ . Ils mettent en évidence des gradients de déplacement importants à l'interface  $+\theta/-\theta$ . Herakovich [8, 9] ont comparé le comportement en traction d'éprouvettes de séquence à plis groupés  $[\theta n/-\theta n]_s$  et à plis alternés  $[(\pm\theta)n]_s$  avec  $\theta = 10^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ . Ils montrent que la contrainte nécessaire à l'amorçage du délaminage de l'éprouvette à plis alternés est supérieure à celle dans laquelle les plis sont groupés. C'est ce que l'on appelle communément l'effet d'épaisseur, deux plis de même orientation empilés successivement se comportant comme un seul pli d'épaisseur deux fois supérieure. Diaz et Caron [10] ont observé par un microscope optique, pour  $\theta = 10^\circ, 20^\circ$  et  $n = 1, 2, 3, 4$ , que des microfissures ou une plasticité matricielle due au cisaillement peuvent apparaître aux interfaces  $+\theta/-\theta$  selon sur la densité des fibres à l'interface. Ce glissement est observé avant le début du délaminage. L'épaisseur des structures composites influence également sur le mode d'endommagement, Yuan et al [11] ont étudié expérimentalement et numériquement par la méthode des éléments finis l'effet de l'épaisseur des plis sur la variation des contraintes interlaminaires, où ils ont testé des éprouvettes avec trois grammages différents ( $20, 60, 120 \frac{g}{m^2}$ ). Les résultats trouvés montrent qu'une augmentation de l'épaisseur des plis conduit à une augmentation de la contrainte de cisaillement interlaminaire  $\sigma_{13}$ . Contrairement au chargement en traction, le rapport  $l/h$  traduit l'effet de l'épaisseur dans le cas de la flexion. Caminero et al [12] ont observé une rupture par délaminage sous chargement de flexion dans une séquence  $[0]_{12}$  pour une valeur  $l/h = 9,25$ . L'objectif de ce travail est de déterminer l'effet du paramètre  $l/h$ , sur l'apparition du délaminage. Pour cela nous avons adopté

un protocole expérimental qui consiste à tester différentes éprouvettes, en carbone/époxyde, sous l'essai de la flexion trois points.

## 2. Protocole expérimental

### 2.1 Fabrication des éprouvettes

Les éprouvettes ont été fabriquées à base d'un préimprégné unidirectionnel en Carbone/Epoxyde dont les séquences et les dimensions sont illustrées dans le Tableau 1. La polymérisation a été effectuée dans un autoclave dont les paramètres, communiqués par le fournisseur, sont (Température : 125°C, Pression : 1.2MPa, Le vide -0.1MPa).

Eprouvette	Séquence	Longueur (mm)	Largeur (mm)	Epaisseur h (mm)	Portée l (mm)	l/h
A1	[0] <sub>24</sub>	36,8	10	4	24	6
A2	[0] <sub>24</sub>	44,8	10	4	32	8
A3	[0] <sub>12</sub>	32,8	10	2	20	10
A4	[0] <sub>12</sub>	36,8	10	2	24	12
A5	[0] <sub>12</sub>	40,8	10	2	28	14
A6	[0] <sub>12</sub>	44,8	10	2	32	16

Tableau 1 caractéristiques géométriques des éprouvettes

### Découpage des éprouvettes

Les éprouvettes ont été coupées à partir des plaques de dimensions (300\*400\*2mm). Afin d'éviter tout type de défaut, le découpage des plaques a été assuré par une fraiseuse CNC spécifique pour les matériaux composites dont les paramètres de coupe sont présentés dans le Tableau 2.

Diamètre de la fraise	2 mm
Vitesse d'avance	5-6 mm/s
Profondeur de coupe	2 mm
Vitesse de rotation	1800rpm

Tableau 2 paramètres de coupes de la fraiseuse CNC

### Polissage des éprouvettes

Afin d'obtenir un bon état de surface d'observation microscopique, les éprouvettes ont été poncées successivement par des papiers abrasifs de grades P300 P400 P600 P1200 et la poudre d'Alumine (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) de taille 0,6µm.

## 3. Résultats et discussion

L'objectif de ce travail est d'étudier l'effet du rapport l/h sur l'endommagement interlaminare des composites stratifiés en Carbone/Epoxyde sous l'essai de la flexion trois points. Pour cela un montage a été adopté pour prendre en considération les recommandations de la

norme de la flexion trois points ASTM D790 [13] (voir la Figure 1). Un microscope électronique a été utilisé pour suivre la rupture microscopique au cours du chargement. Les essais ont été réalisés sur la machine MTS d'une cellule de force de 100KN et la vitesse de chargement de 0,2mm/min.

La Figure 2 montre les courbes charge déplacement pour différentes valeurs l/h des éprouvettes [0]<sub>12</sub> et [0]<sub>24</sub>, pour les deux éprouvettes A1 et A2 dont l'épaisseur égale 4mm la courbe macroscopique présente plusieurs chutes de rigidité par contre pour les éprouvettes A3, A4, et A5 dont l'épaisseur égale à 2mm présentent moins de chute de rigidité.

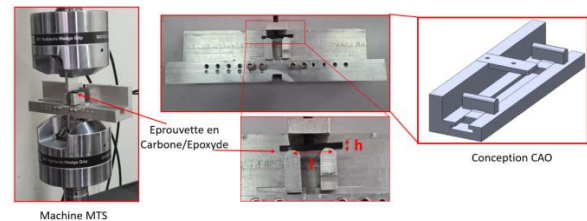


Figure 1 Montage de la flexion trois points adopté

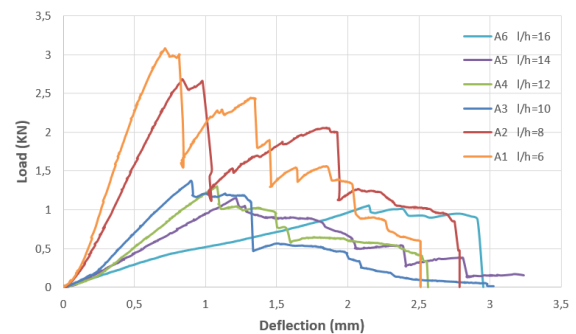


Figure 2 Courbes charge-déplacement pour les différentes valeurs du l/h

La Figure 3 indique la séquence de l'endommagement à l'échelle microscopique de l'éprouvette A1 où le nombre de couche est égal à 24, cette séquence se compose principalement par des ruptures verticales suivies dans la zone supérieure par des délaminages. On remarque que l'éprouvette se rompt par des sauts de 6 plis environ.

La Figure 4 indique la séquence de l'endommagement à l'échelle microscopique de l'éprouvette A3 où le nombre de couche est égal à 12, nous avons remarqué que le mode d'endommagement microscopique se répète également pour les autres éprouvettes (A2, A4, A5 et A6).



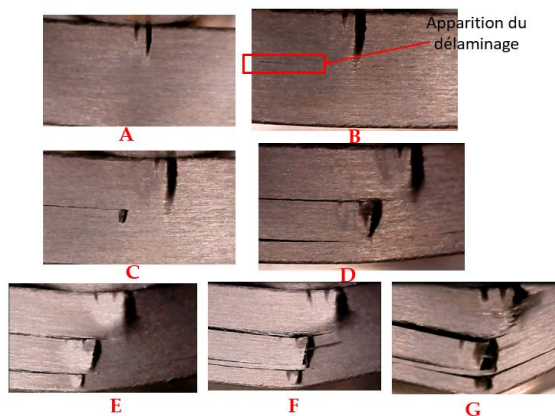


Figure 3 la séquence de l'endommagement microscopique de l'éprouvette A1 (grossissement  $\times 25$ )

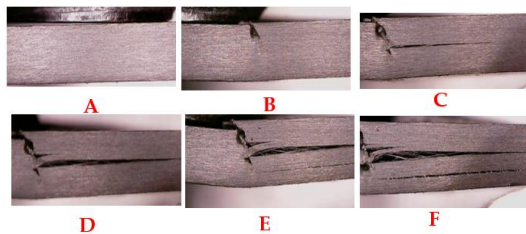


Figure 4 la séquence de l'endommagement microscopique de l'éprouvette A3 (grossissement  $\times 25$ )

#### 4. Conclusion et perspectives

Une étude expérimentale a été réalisée pour identifier l'effet du rapport  $l/h$  pour des valeurs faibles sur l'endommagement interlaminaire des composites stratifiés sous l'essai de la flexion trois points. Les courbes macroscopiques montrent, d'une part, que le comportement est linéaire avant la première chute de rupture, et d'autre part, que les éprouvettes dont l'épaisseur est égal à 4mm présentent plusieurs chutes de rigidité. Ces dernières indiquent les ruptures verticales et les délaminages observés par le microscope.

Le mode d'endommagement et la succession de la rupture sont reliés principalement avec l'orientation des plis et des paramètres géométriques comme le rapport  $l/h$ . En perspective, Il serait donc judicieux de dupliquer cette démarche expérimentale pour autres orientations des plis.

#### Références

- [1] C. Bathias, *Matériaux composites*, 2eme Editi. Dunod, 2002.
- [2] J. Echaabi, F. Trochu, X. T. Pham, and M. Ouellet, "Theoretical and Experimental Investigation of Failure and Damage Progression of Graphite-Epoxy Composites in Flexural Bending Test," *J. Reinf. Plast. Compos.*, vol. 15, no. 7, pp. 740–755, Jul. 1996.

- [3] Y. Benbouras, M. Bellahkim, A. Maziri, E. Mallil, and J. Echaabi, "An analytical and experimental study of the nonlinear behaviour of a carbon/epoxy under a three-point bending test," *Plast. Rubber Compos.*, pp. 1–9, 2021.
- [4] Y. Benbouras, M. Bellahkim, A. Maziri, E. Mallil, and J. Echaabi, "Nonlinear modeling of the failure of a graphite epoxy under a three-point bending test.," *Polym. Polym. Compos.*, vol. 28, no. 2, pp. 119–139, Aug. 2019.
- [5] C. T. Herakovich, "On the Relationship between Engineering Properties and Delamination of Composite Materials," *J. Compos. Mater.*, vol. 15, no. 4, pp. 336–348, Jul. 1981.
- [6] R. CZARNEK, D. POST, and C. HERAKOVICH, "Edge Effects in Composites by Moiré Interferometry," *Exp. Tech.*, vol. 7, no. 1, pp. 18–21, Jan. 1983.
- [7] C. T. Herakovich, D. Post, M. B. Buczek, and R. Czarnek, "Free Edge Strain Concentrations in Real Composite Laminates: Experimental-Theoretical Correlation," *J. Appl. Mech.*, vol. 52, no. 4, pp. 787–793, Dec. 1985.
- [8] C. T. Herakovich, "Edge effects and delamination failures," *J. Strain Anal. Eng. Des.*, vol. 24, no. 4, pp. 245–252, Oct. 1989.
- [9] C. T. Herakovich, "Failure modes and damage accumulation in laminated composites with free edges," *Compos. Sci. Technol.*, vol. 36, no. 2, pp. 105–119, Jan. 1989.
- [10] A. Diaz Diaz and J. F. Caron, "Interface plasticity and delamination onset prediction," *Mech. Mater.*, vol. 38, no. 7, pp. 648–663, 2006.
- [11] Y. Yuan, X. Yao, B. Liu, H. Yang, and H. Imtiaz, "Failure modes and strength prediction of thin ply CFRP angle-ply laminates," *Compos. Struct.*, vol. 176, pp. 729–735, 2017.
- [12] M. A. Caminero, G. P. Rodríguez, and V. Muñoz, "Effect of stacking sequence on Charpy impact and flexural damage behavior of composite laminates," *Compos. Struct.*, vol. 136, pp. 345–357, 2016.
- [13] ASTM D790, "Standard Test Methods for Flexural Properties of Unreinforced and Reinforced Plastics and Electrical Insulating Materials 1," *Am. Soc. Test. Mater.*, 1997, doi: 10.1520/D0790-10.

# CHARACTERIZATION OF POST-CONSUMER RECYCLED HIGH IMPACT POLYSTYRENE FROM DISPOSABLE CUPSTIMES NEW ROMAN

H. EL BHILAT<sup>1</sup>, K. EL HAD<sup>2</sup>, H. SALMI<sup>1</sup>, H. MABCHOUR<sup>2</sup>, A. HACHIM<sup>2</sup>

1. National higher school of mechanics, ENSEM, Laboratory of Control and Mechanical Characterization of Materials and Structures, Casablanca, 20232, Morocco

2. Institute of Maritime Studies, Laboratory of Materials and Structures, Casablanca, 20232, Morocco

\*Contact: hanan.el.bhilat@gmail.com

## Abstract

The aim of this work is to characterize high impact polystyrene (HIPS) from disposable cups of different shapes and colors, these post-consumer cups were first crushed using a shredder, giving small particles of about 5 mm in characteristic size. A small portion of these granules was dedicated to the MFI, DSC, IRFT and TGA test, while the rest was molded using a SINTESI injection press with a 40-ton compression force. Cylinder and nozzle temperatures were set at 200 ° C and 180 ° C, respectively, while the mold was held at 45 ° C. The dimensions of the molded samples were for tensile samples. In order to simulate the recycling process as accurately as possible, the disposable cups underwent 2 successive grinding / injection cycles, and during each cycle the tensile, flexural strength, DSC, IRFT, and TGA tests were performed to evaluate the evolution of the thermo-mechanical properties of the material.

**Keywords:** *Recycling, High impact polystyrene, characterization, polymer, reprocessing*

## 1. Introduction

Recycling has become over the years an ecological necessity and an important economic issue, as the current use of food packaging (among others) is constantly increasing and generates the production of a great diversity of waste [1-4]. The interest in developing processes for processing consumer materials such as food containers is great, since this will make it possible to overcome the environmental problems of waste storage and will contribute to significantly increasing the lifespan of the material.

High impact polystyrene (HIPS) is an amorphous polymer known for its use in plastics industries especially of consumer products [5]. Its advantage is that it has good mechanical and chemical properties, with good barrier properties (permeability to gases, to contaminants). The recycling of this material by transformation in the molten state has been the subject of numerous researches, in order to study the degradation processes which, lead to a loss of the macroscopic properties of the polymer. Despite

the interest in this material, its reconversion in the second hand industry is still problematic, since it ends quickly in the landfills again [6-8].

The aim of this paper is to study the effect of two successive recycling processes on the thermo-mechanical properties of HIPS. Our methodology is based on a series of tests to understand the influence of the modification of molecular or chemical structure on the macroscopic behavior of the material. This part is important since it makes it possible to determine the second lifespan of the material in terms of use by the consumer for example.

## 2. Material and experimentation

### 2.1 Recycled high impact

High impact polystyrene is most often used in industry. It is a question of adding, during the manufacture of polystyrene, a special agent allowing to increase its impact resistance. It is obtained by adding to the reaction from 2% to 10% of polybutadiene, HIPS has a very good resistance impact, but not transparent.

Recycled HIPS is obtained from disposable cups received from informal collectors. The disposable cups were then shredded and molded into different specimens for different tests

### 2.2. Fourier transform infrared spectroscopy

The IR analyzes are carried out by infrared fourier transform analysis (IRFT) on Perkin Elmer UATR TOW equipment (Figure 1) at the CTPC laboratory Casablanca. The spectral range of this device extends from 400 to 4000 cm<sup>-1</sup>, that is to say on the infrared medium, so all the functions studied here absorb in the medium infrared; the field of study is therefore limited to between 450cm<sup>-1</sup> and 4000cm<sup>-1</sup>. The spectra are carried out on test pieces of thickness between 30 and 40 μm obtained by cutting.

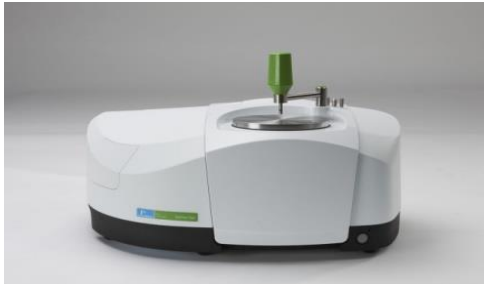


Fig. 1. Infrared spectroscopy

### 2.3. Differential scanning calorimetry DSC

Differential scanning calorimetry (DSC) is used to study the thermal transitions of materials, in order to determine properties such as the glass transition temperature ( $T_g$ ), the crystallization temperature ( $T_c$ ) or the melting temperature. This technique is often used on organic materials (plastics, drugs, adhesive, food) but can also be very useful for inorganic substances (alloys, liquid crystals, etc ...).

The device used is a TAQ500 (figure 2) of the TA instrument brand. Pieces of polymers are taken from the test pieces (about 5 mg), and introduced into a crucible. The tests are carried out at a heating rate of  $20\text{ }^\circ\text{C} / \text{min}$  under an inert atmosphere (nitrogen), the temperature range chosen and from  $25\text{ }^\circ\text{C}$  to  $1000\text{ }^\circ\text{C}$ .



Fig. 2. ATG instrument.

### 2.4. Tensile and flexural tests:

Tensile and flexural tests make it possible to qualitatively determine whether a material is ductile or brittle, rigid or flexible. They also make it possible to quantify mechanical properties such as the modulus of elasticity, maximum strength or stress and elongation at break in tension and flexural modulus in flexion. The tensile tests of the material were carried out on five samples of both cycles in accordance with standard ISO 527-5. The tests were carried out on a Zwick Roell universal testing machine at a transverse speed of  $5\text{ mm} / \text{min}$  using a  $2,5\text{ kN}$  force sensor (Figure 3).



Fig. 3. Tensile and flexion instrument

## 3. Results and discussion

### 3.1. IRFT:

The analysis results from the IRFT test are presented in figure 4:

A side-by-side comparison between the resulted spectrum and the closest one from the program's library was done, using spectral comparison algorithm and Euclidean searching by spectral searching against commercially available or customer-developed libraries. The material is similar to high impact polystyrene previously entered to the laboratory database.

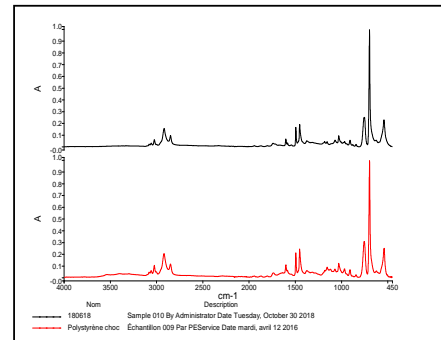


Fig. 4. FTIR results

### 3.2. DSC and TGA results:

We have recorded DSC thermograms for our samples (table below) after registration of the baseline and calibration of the device. We took care, before using them, to remove the background contribution that matches the basic signal.

The glass transition temperature ( $T_g$ ) for both polystyrene was subsequently assessed using the DSC. At  $104.45\text{ }^\circ\text{C}$  there is a transition to the recycled PS and at  $88.2\text{ }^\circ\text{C}$  to the virgin PS. In general,  $T_g$  is higher with Mw but due to impurities and additives the value may shift, which may justify why recycled PS has a higher  $T_g$ , although its molecular weights are lower.

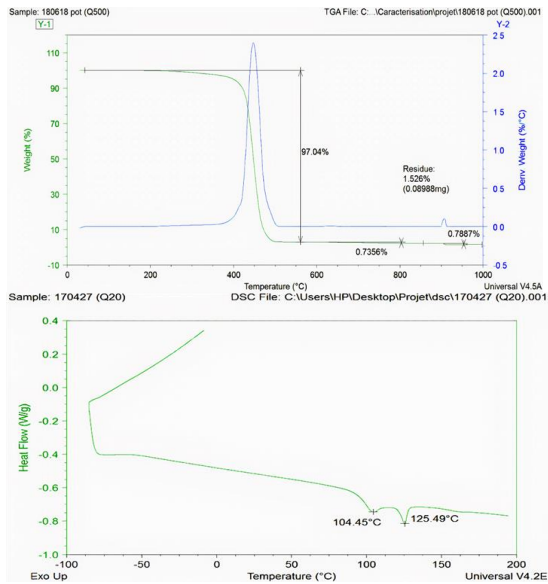


Fig. 5. DSC and TGA analysis results

Results from Figure 5 suggest that the recycled HIPS have three distinct stages of mass loss. It is noted that the HIPS has a residual mass of 1.53% at 1000 °C. which means that the manufacturer has introduced inorganic material recycling this grade of HIPS. A slight shift is noted at the level of the maximum temperature of mass loss towards the high temperatures and by the same a beginning of degradation at higher temperature. An increase in the decomposition temperature scale would improve the thermal stability of recycled HIPS, and thus broaden the possibilities of transformation of our material.

### 3.3. Tensile and flexion results:

The results of tensile and flexion tests are shown on figure 6.

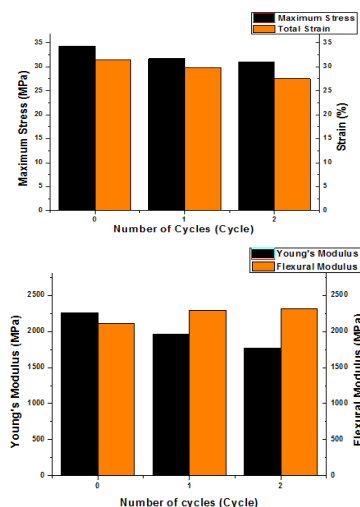


Fig. 6. Results of tensile and flexural properties for virgin and recycled HIPS.

The results of tensile tests confirm the results of MFI tests, in fact, Young's modulus indicates the rigidity of the material, in figure 6, Young's modulus and maximum stress decrease on the first and second cycle, although this decrease isn't very significant; it states that the material has endures damage by chain scission while reprocessing. The slight increase in flexural modulus may be related to the crosslinking in both recycling cycles, this can increase the material's resistance to bending.

## 4. Conclusion:

In this paper, the effect of recycling HIPS twice is studied. Material from disposable cups was shredded, molded and characterized via FTIR, TAG, DSC, MFI, tensile, and flexural tests. The results suggested a mild damage due to thermomechanical processing during mechanical recycling, through chain scission mechanisms.

The FTIR test confirmed the material purity, as the specter matches the virgin material's, except peaks of different nature, those turned out to be mineral charges and soot validated by the TGA test. The ATG also indicates a slight improvement in thermal degradation.

In conclusion, high impact polystyrene recycled twice still falls in rigid thermoplastics as its mechanical and thermal properties barely changed. The material is considered to be reintegrated in the industries.

## References

- [1] Bertomeu, D.; Arrieta, M.P.; Ferri, M.; Juan, L. *Interference of Biodegradable Plastics in the Polypropylene Recycling Process*. Materials 2018, 11, 1886.
- [2] Kalargaris, I.; Tian, G.; Gu, S. *The utilisation of oils produced from plastic waste at different pyrolysis temperatures in a DI diesel engine*. Energy 2017, 131, 179–185.
- [3] Zander, A.N.E.; Gillan, M.; Gardea, F. *Recycled polypropylene blends as novel 3D printing materials*. Addit. Manuf. 2019, 25, 122–130.
- [4] Mourad, A.I. *Thermo-mechanical characteristics of thermally aged polyethylene/polypropylene blends*. Mater. Des. 2010, 31, 918–929.
- [5] C. A. Daniels, *Polymers: Structure and Properties*, 1st ed., Technomic, 1985, pp. 18–19.
- [6] Kulkarni, G.S. *Introduction to Polymer and Their Recycling Techniques. In Recycling of Polyurethane Foams*; William Andrew Publishing: Halle(Saale), Germany, 2018; pp. 1–16.
- [7] Taylor, P.; Maharana, T.; Negi, Y.S.; Mohanty, B. *Recycling of Polystyrene*. Polym.-Plast. Technol. Eng. 2007, 46, 729–736.
- [8] Satterthwaite, M.K. *Plastics Based on Styrene. In Brydson's Plastics Materials*; Elsevier: Amsterdam, The Netherlands, 2017; pp. 311–328.

## Coupled Thermo-Magneto-Electro-Elastic Effective Properties: Micromechanical Modeling

N. TASSI<sup>1</sup>, L. AZRAR<sup>1,3</sup>, N. FAKRI<sup>2</sup>, A. A. ALJINAIDI<sup>3</sup>

1. Research Center STIS, M2CS, Department of Applied Mathematics and Informatics, ENSAM-Rabat, Mohammed V University in Rabat, Morocco

2. MMC, Faculty of Sciences and Techniques of Tangier, Abdelmalek Essaadi University, Tangier, Morocco.

3. Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, King Abdulaziz University, Jeddah, Saudi Arabia

### Abstract :

In this work a micromechanical modeling of fully coupled reinforced thermo-magneto-electro-elastic composites is analyzed. The analysis is based on Eshelby inclusion principle and the well-conditioned thermo-magneto-electro-elastic localization tensors. The global behavior is obtained using two of micromechanical methods such as: the incremental self consistent and the differential approaches. The effective thermo-magneto-electro-elastic properties are derived as a function of the volume fraction for different types and shapes of inclusions.

**Keywords :** *Thermo-magneto-electro-elastic composites; Micromechanical models; Incremental self-consistent model; Differential Scheme*

### 1 Introduction

The analysis of the effective behavior of smart materials such as the thermo-electro-magneto-elastic composites, has long been an important research field due to their used in various topics, including geophysics, solid state physics and micromechanics. For this sake, the cells method is used to determine the effective behavior of electro-magneto-thermo-elastic composite materials Aboudi [1]. In [2], the global behaviour of a periodic multi-laminated magneto-electro-elastic composites is predicted using the homogenization model. The effective magneto-electro-elastic behavior of three-phase particulate composite is investigated by Kuo et al. [3] using Mori-Tanaka's and finite element methods.

In thermal material environments, the effects of magnetic and electric fields on the stability of smart magneto-electro-thermo-elastic beams are analyzed in [4]. Vinyas et al [5] modeled the thermal effect on the uncoupled response of thermo-magneto-electro-elastic materials using three dimensional finite element.

In this work, a micromechanical modeling for fully coupled thermo-magneto-electro-elastic behavior is analyzed based on magneto-electro-elastic Green's tensors technical and on the Eshelby inclusion tensors. Due to large dispersion between elastic, dielectric, piezoelectric, magnetic and piezomagnetic properties ill-conditioned localization tensors are resulted. The ill-posed problem is solved by using a block decomposition procedure. Various micromechanical models are used with the resulting conditioning localization tensors. Numerical results of the effective thermo-magneto-electro-elastic coefficients

are obtained and presented with respect to volume fractions and shape of inclusions.

### 2 Problem formulation

Considering a representative elementary volume (REV)  $V$  of thermo-magneto-electro-elastic material under a small deformation and low electric field where the associated equations are expressed as [6]:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - e_{lij}E_l - q_{lij}H_l - \beta_{ij}\Delta T \\ D_i = e_{ikl}\varepsilon_{kl} + \kappa_{il}E_l + a_{il}H_l + p_i\Delta T \\ B_i = q_{ikl}\varepsilon_{kl} + a_{il}E_l + \mu_{il}H_l + m_i\Delta T \\ h_i = K_{il}Q_l \\ S = \beta_{kl}\varepsilon_{kl} + p_lE_l + m_lH_l + \eta\Delta T \end{cases} \quad (1)$$

where  $C_{ijkl}$ ,  $e_{kij}$ , and  $\kappa_{ik}$  are the components of the elastic tensor, piezoelectric coefficients, and dielectric permittivity tensor, respectively.  $q_{kij}$ ,  $a_{ik}$  and  $\mu_{ik}$  are the coefficients of the piezomagnetic, magnetoelectric, and magnetic permeability tensors respectively.  $K_{ik}$ ,  $Q_k$ ,  $h_i$  and  $\Delta T$  are the thermal conductivity tensor, heat strain vector, the thermal flux vector, and the temperature change, respectively.  $\beta_{ij}$  represent the components of the thermal stress coefficient.  $p_i$ ,  $m_i$  and  $\eta$  are the pyroelectric vector, pyromagnetic vector, and heat capacity, respectively. The strain tensor  $\varepsilon$ , the electric field  $E$ , the magnetic field  $H$ , and the heat strain vector  $Q_i$  are assumed to derive from the elastic displacement  $u$ , the potentials  $\Phi^e$ ,  $\Phi^m$ , and the temperature change  $\Delta T$ . Using the condensed form [7, 8] the following expressions are obtained:

$$\begin{cases} \Sigma_{iJ} = E_{iJKl}Z_{Kl} - \Pi_{iJ}\Delta T \\ S = \Pi_{Kl}^t Z_{Kl} + \eta\Delta T \end{cases} \quad (2)$$

where

$$\Sigma_{iJ} = \begin{bmatrix} \sigma_{ij} \\ D_i \\ B_i \\ h_i \end{bmatrix} \quad Z_{Kl} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{kl} \\ -E_l \\ -H_l \\ Q_l \end{bmatrix} \quad \Pi_{iJ} = \begin{bmatrix} \beta_{ij} \\ -p_i \\ -m_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{iJKl} = \begin{bmatrix} C_{ijkl} & e_{lij} & q_{lij} & 0 \\ e_{ikl} & -\kappa_{il} & -a_{il} & 0 \\ q_{ikl} & -a_{il} & -\mu_{il} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{il} \end{bmatrix} \quad U_K = \begin{bmatrix} u_k \\ \Phi^e \\ \Phi^m \\ \Delta T \end{bmatrix}$$

Using the fact that  $\Sigma_{iJ,i} = 0$  and  $Z_{Kl}$  is derived from the generalized potential field ( $Z_{Kl} = U_{K,l}$ ) and based on the magneto-electro-thermo-elastic Green's function

of the homogeneous media using some successive mathematical developments, the following generalized integral equation in terms of  $Z(r)$  is resulted:

$$Z_{Kl}(r) = Z_{Kl}^0 - \int_V \Gamma_{iJKl}(r-r') [\delta E_{iJMn} Z_{Mn}(r') - \delta \Pi_{iJ}(r') \Delta T - \Pi_{iJ}^0 \Delta T] dV'$$

where  $\Gamma$  is the modified thermo-magneto-electro-elastic Green's tensor [8] ( $\Gamma_{iJKl}(r-r') = -G_{JK,li}(r-r')$ ), the explicit formulation is presented in [10].

In order to deal with this integral equation, the Eshelby inclusion's principle is used [6]:

$$Z_{Kl}^I(r) = Z_{Kl}^0 - \frac{1}{V^I} T^{II} \Delta E_{iJMn}^I Z_{Mn}^I(r') + \frac{1}{V^I} T^{II} \Pi_{iJ}^I \Delta T \quad (3)$$

where  $T_{iJKl}^{II} = \int_{V^I} \int_{V^I} \Gamma_{iJKl} dV' dV$  represent the condensed notation of interaction tensors.

### 3 Localization tensors

The generalized local strain field  $Z^I$  is related to the macroscopic field  $Z^0$  by [9]:

$$Z_{Kl}^I = A_{KlMn}^I Z_{Mn}^0 + a_{Kl}^I \Delta T \quad (4)$$

where  $A_{KlMn}^I$  and  $a_{Kl}^I$  are the localization tensors. Various micromechanical models can be used to define the expression of localization tensors. Herein, the incremental self consistent and the differential approaches are elaborated.

For both micromechanical methods the expression of the associated localization tensors  $A^I$  and  $a^I$  are given by

$$A_{KlMn}^I = \left[ I_{MnKl} + \frac{1}{V^I} T_{iJMn}^{II} (E_{iJKl}^I - E_{iJKl}^{eff}) \right]^{-1}$$

$$a_{Kl}^I = \frac{1}{V^I} A_{KlMn}^I T_{iJMn}^{II} \Pi_{iJ}^I$$

where  $E_{iJKl}^{eff}(f^I = 0) = E_v$ ,  $E_v$  is the Voigt tensor ( $E^v = f^I E^I + (1-f^I) E^m$ ). These localization tensors will be used to derive the effective behavior of the reinforced thermo-magneto-electro-elastic composite. As demonstrated in [10], the large dispersion between the elastic, piezoelectric and magnetic properties, the expression of localization tensor, associated to each micromechanical approach lead to ill-conditioned tensors and lead to unstable results. To deal with this drawback a block matrix decomposition is used to obtain well conditioned methodological approaches. The details of the block matrices decomposition inverse are presented in [6]. The resulted tensors will be used for numerical predictions of effective properties of the considered heterogeneous materials.

### 4 Effective behavior

Let consider  $\bar{\Sigma}$  is the macroscopic generalized stress applied over the REV ( $V$ ), which is linked to the local generalized stress by  $\bar{\Sigma}_{iJ} = \frac{1}{V} \int_V \Sigma_{iJ}(r) dV$  and for N-phase

inclusions  $\bar{\Sigma}_{iJ} = \sum_{I=1}^N f^I \Sigma_{iJ}^I$ . By introducing the local constitutive equation of the inclusion, the effective expression of magneto-electro-thermo-elastic tensors in case of N-phases composite is given by:

$$E_{iJKl}^{eff} = \sum_{I=1}^N f^I E_{iJMn}^I A_{MnKl}^I \quad (5)$$

$$\Pi_{iJ}^{(eff)} = - \sum_{I=1}^N f^I (E_{iJMn}^I a_{Mn}^I - \Pi_{iJ}^I) \quad (6)$$

Moreover, the expression of the entropy allows deriving the effective transpose thermal properties and the effective heat capacity as follow:

$$\Pi_{Kl}^{t(eff)} = \sum_{I=1}^N f^I \Pi_{Mn}^{It} A_{MnKl}^I \quad (7)$$

$$\eta^{eff} = \sum_{I=1}^N f^I (\Pi_{Mn}^{It} a_{Mn}^I + \eta^I) \quad (8)$$

In this work, the Differential Schemes (DS) and Incremental self-consistent (ISC) approaches are used and the effective behavior are obtained based on the associated localization tensors.

## 5 Numerical Results & Discussion

In this section numerical results are presented with considering a two-phase thermo-magneto-electro-elastic composite where the matrix is piezomagnetic ( $CoFe_2O_4$ ) reinforced by piezoelectric ( $BaTiO_3$ ) inclusions, the material properties are taken from [11]. In what follows, the global coordinate system for the matrix is  $(x_1, x_2, x_3)$  and  $a, b$  and  $c$  are half axes of the ellipsoidal inclusion aligned with directions  $x_1, x_2$ , and  $x_3$  respectively, and  $x_3$  is the poling direction. The shape of inclusions is determined by the variation of the aspect ration ( $\psi = c/a$ ).

Firstly, the stability and well-conditioning obtained from the block decomposition inverse is recently demonstrated in [10]. In the following, these regularized localization tensors are used to get the numerical predictions of effective thermo-magneto-electro-elastic properties for both considered micromechanical methods.

Based on the above presented models, thermo-magneto-electro-elastic effective coefficients are computed with respect to the volume fraction and shapes of inclusions. In Fig 1 (a) the piezomagnetic coefficients  $q_{31}$  and  $q_{33}$  are illustrated using Mori-Tanaka (MT), Differential scheme (DS) and Incremental Self-consistent (ISC) methods in the case of spherical inclusions ( $\psi = 1$ ). It is demonstrated that all predictions of piezomagnetic coefficients gives the same results. The effective magnetic permeability coefficients  $\mu_{11}$  and  $\mu_{33}$  are given in Fig 1 (b), the difference between the three models is shown for the coefficient  $\mu_{11}$ . In Figure 2, the effective thermal expansion coefficient  $\alpha_{33}$  and the heat capacity  $\eta$  is illustrated as a function of volume fraction of the inclusion using (DS)

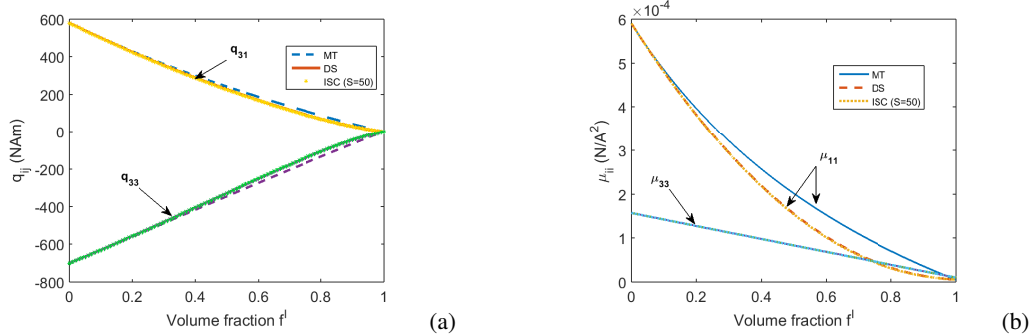


Figure 1: Effective piezomagnetic and magnetic permeability coefficients predicted by MT, DS and ISC (S=50) models

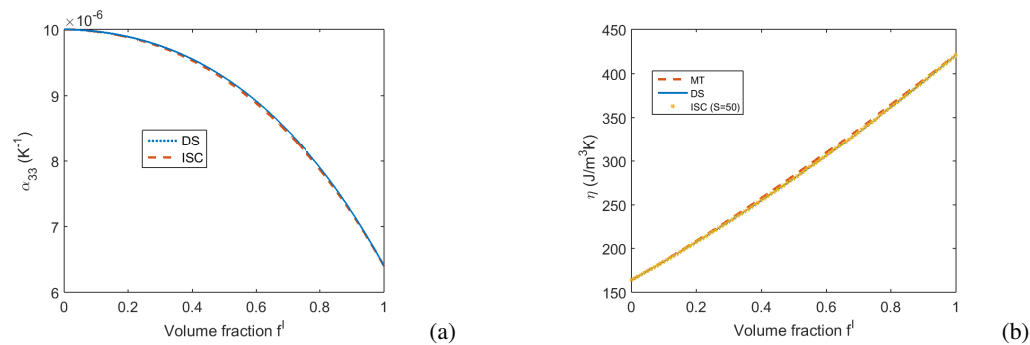


Figure 2: Effective thermal expansion coefficient  $\alpha_{33}$  and specific heat capacity  $\eta$  predicted by MT, DS and ISC (S=50) models

and (ISC, S=50). It is clear that the obtained predictions for fibrous inclusions are superimposed.

## 6 Conclusion

In this paper effective properties of fully coupled thermo-magneto-electro-elastic behavior are derived based on micromechanical modelings. The ill-condition problem due to the large dispersion between the materials properties is solved using a block decomposition of the localization tensor. The entropy equation in the modeling allowed to predict the effective expression of the heat capacity. The effective properties are presented for different shapes and volume fractions of piezo-magnetic reinforced composites.

## Acknowledgment

This research work is on the frame of the PPR2/06/2016 project. We acknowledge with thanks the CNRST and the Moroccan Ministry of Higher Education and Scientific Research financial support.

## References

- [1] J. Aboudi, *Micromechanical analysis of fully coupled electro-magneto-thermo-elastic multiphase composites*, Smart Materials and Structures, 10 (2001) 10.
- [2] J. B. Castillero, R.R. Reinaldo, J. Federico, *Homogenization of magneto-electro-elastic multilaminated materials*, The Quarterly Journal of Mechanics & Applied Mathematics, 61 (2008) 311–332.
- [3] H. Kuo, T. Wu, *Magnetolectric effect of three-phase core-shell-matrix particulate multiferroic composites*, Journal of Applied Physics, 111 (2012) 054915.
- [4] F. Ebrahimi, MR. Barati, *Buckling analysis of smart size-dependent higher order magneto-electro-thermo-elastic functionally graded nano-size beams*, Journal of Mechanics, 1 (2017) 23–33.
- [5] M. Vinyas, Kattimani, S. Chandra, M. Loja, M. Vishwas, *Effect of Ba-TiO<sub>3</sub>/CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> micro-topological textures on the coupled static behaviour of magneto-electro-thermo-elastic beams in different thermal environment*, Materials Research Express, 5 (2018) 125702.
- [6] N. Tassi, A. Bakkali, N. Fakri, L. Azrar, A. Aljinaidi, *Mathematical modeling of fully coupled reinforced Magneto-Electro-Thermo-Mechanical effective properties based on conditioned micromechanics*, Composite Structures, 280 (2022) 114896.
- [7] A. Fakri, A. Azrar, A. Bakkali, *Electroelastic behavior modeling of piezoelectric composite materials containing spatially oriented reinforcements*, International Journal of Solids and Structures, 40 (2003) 361–384.
- [8] A. Bakkali, L. Azrar, N. Fakri, *Modeling of effective properties of multi-phase magnetoelastoelectric heterogeneous materials*, Computers, Materials, & Continua, 23 (2011) 201–231.
- [9] A. Fakri, A. Azrar, A. Bakkali, *Modeling of Thermo-Electro-Elastic Effective Behaviors of Piezoelectric Composite Mediums and Analysis of Reinforcement Orientation Effects*, IUTAM Symposium on Multiscale Modeling and Characterization of Elastic-Inelastic Behavior of Engineering Materials, (2004) 251–258.
- [10] N. Tassi, A. Bakkali, N. Fakri, L. Azrar, A. Aljinaidi, *Well conditioned mathematical modeling for homogenization of thermo-electro-mechanical behaviors of piezoelectric composites*, Applied Mathematical Modelling, 99 (2021) 276–293.
- [11] K. S. Challagulla, AV. Georgiades, *Micromechanical analysis of magneto-electro-thermo-elastic composite materials with applications to multilayered structures*, International Journal of Engineering Science, 49 (2011) 85–104.

## Contribution à la détermination des coefficients élastiques du béton chaux-chanvre par quelques méthodes d'homogénéisation

Djaoyang Gogobélé<sup>1</sup>, Guy Edgar Ntamack<sup>1</sup>, Saâd Charif D'Ouazzane<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Groupe de Mécanique, Matériaux et Acoustique, Département de Physique, Faculté des Sciences, Université de Ngaoundéré, B.P. 454 Ngaoundéré - Cameroun.

<sup>2</sup>Laboratoire de Mécanique, Thermique et Matériaux, LMTM, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Rabat, B.P. 753 Rabat, Maroc.

[djaoyanggogobele@yahoo.fr](mailto:djaoyanggogobele@yahoo.fr), [guvedgar@yahoo.fr](mailto:guvedgar@yahoo.fr), [charifenim@hotmail.com](mailto:charifenim@hotmail.com)

### Résumé :

Le béton chaux-chanvre est un matériau de construction qui présente l'avantage d'être performant pour ses propriétés thermiques lors de son utilisation, et sur le plan environnemental dans la globalité de son cycle de vie. Ses propriétés mécaniques et acoustiques quant à elles, diffèrent à bien des égards des matériaux traditionnels de construction. L'objectif de ce travail est d'exprimer les effets des chènevottes sur les modules d'élasticité du composite chaux-chanvre. Des approches théoriques sont confrontées aux résultats expérimentaux obtenus pour des pâtes de chaux avec des concentrations volumiques de la chènevotte allant de 0 à 0,35. Les modules d'élasticité du matériau composite chaux-chanvre sont déterminés par des modèles mathématiques en utilisant les solutions théoriques déduites des méthodes d'homogénéisation de Voigt, de Reuss, de Mori-Tanaka, de Hashin-Shtrikman et la méthode Auto-cohérente. La cohérence des résultats obtenus valide l'application des théories utilisées aux composites chaux-chanvre.

**Mots clés :** Chanvre, Chaux, Homogénéisation, Modules d'élasticité, Comportement macroscopique.

### Abstract:

The concrete Hem Lime it's a construction material that presents advantage to be performant when used, for its thermal properties, and on environmental global cycle of life. Its mechanical and acoustic properties differ from the traditional building materials. The objective of this work is to express the effects of hemp on the moduli of elasticity of the lime-hemp composite. Theoretical approaches are confronted with the experimental results obtained for lime pastes with bulk concentration of chenevotte going from 0 to 0,35. The moduli of elasticity of the lime-hemp composite material are determined by mathematical models using the theoretical solutions deduced from the homogenization methods of a Voigt, Reuss, Mori-Tanaka, Auto-cohérente, Hashin-Shtrikman and Self-consistent method. The coherence of the results obtained, valid the application of the theory used for the lime-hemp composite.

**Key words :** Hemp, Lime, Homogenization, Elasticity module, macroscopic behaviour.

### 1- Introduction

Le béton de chanvre est un matériau de construction constitué d'une matrice élastique linéaire qui est la chaux chargée par des chènevottes de forme sphérique. Ce béton est obtenu en mélangeant de la chènevotte avec un liant à base de chaux et d'eau. Intégrer le chanvre dans la construction représente une solution pour contribuer à la réduction des émissions des gaz à effet de serre [1]. Les bétons et mortiers en chanvre sont des

matériaux non porteurs et aux multiples utilisations, excellents isolants thermiques et acoustiques, durables, résistants, légers, élastiques et ignifuges [2]. Possédant les avantages d'un matériau de construction prometteur, le béton de chanvre suscite des attentions particulières, notamment sur sa capacité à réguler la température et l'humidité intérieure pendant les périodes chaudes et humides [3]. L'objet principal de ce travail est la prédiction du comportement élastique du béton composite chaux-chanvre.

Deux approches d'homogénéisations sont utilisées dans cette étude. Une première approche analytique basée sur les bornes et quelques modèles analytiques ; et une deuxième approche expérimentale. Parmi les méthodes disponibles dans la littérature, nous avons les bornes extrêmes de Voigt (V) [4] et de Reuss (R) [5] ; puis les bornes plus resserrées de Hashin-Shtrikman (HS) [6] et les modèles Auto-Cohérent (AC) [7] et Mori-Tanaka [8]. Pour la méthode expérimentale, nous avons utilisé les résultats de T.H. PHAM et al. [9]. La morphologie de la microstructure est représentée dans le modèle par un paramètre qui est le Volume Élément Représentatif (VER). En se basant sur cette notion, on peut définir et étudier la forme optimale de la microstructure pour un comportement macroscopique souhaité [10].

### 2- Microstructure

Pour produire le béton, la chaux et l'eau sont d'abord mélangées à l'aide d'un malaxeur à axe vertical pendant 3 à 5 minutes, ce qui permet d'obtenir un mélange homogène et sans grumeau. Ensuite on ajoute le chanvre décompressé et on laisse malaxer pour obtenir un mélange homogène qui a une consistance de « miettes agglomérées ».

La forme des chènevottes est identifiée à l'aide du logiciel ImageJ®. Une ellipse ajustée à chaque objet permet d'étudier la forme et les orientations des inclusions (image c).



a) Image d'origine (scannée en couleur) b) Image en cours de traitement par ImageJ® c) Image finale

**Figure 1 :** Procédure de détermination de l'orientation et de la forme des particules du composite chaux-chanvre [9].



### 3- Approche usuelle en homogénéisation

#### 3.1. Préliminaires

En élasticité linéaire, les relations entre contrainte  $\sigma$  et déformation  $\varepsilon$  et inversement sont données par :

$$\sigma = C : \varepsilon \quad (1)$$

$$\varepsilon = C : \sigma \quad (2)$$

où C est le tenseur des rigidités élastiques et S le tenseur des souplesses élastiques. Les équations constitutives pour le composite chaux-chanvre sont données par :

$$\sigma_m = C_m : \varepsilon_m \quad (3)$$

$$\sigma_c = C_c : \varepsilon_c \quad (4)$$

Lorsqu'un composite est chargé, le champ de contrainte ponctuel  $\sigma(x)$  et le champ de déformation correspondant  $\varepsilon(x)$  sont non uniformes à l'échelle microscopique. Cependant, les résultats peuvent être obtenus en terme de contrainte moyenne ou de déformation moyenne :

$$\varepsilon = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon(x) \, dv \quad (5)$$

$$\sigma = \frac{1}{V} \int_V \sigma(x) \, dv \quad (6)$$

Les moyennes globales entre la contrainte (ou la déformation) moyenne de la chènevotte et de la chaux sont données par :

$$\varepsilon = V_c \varepsilon_c + V_m \varepsilon_m \quad (7)$$

$$\sigma = V_c \sigma_c + V_m \sigma_m \quad (8)$$

Etant donné la linéarité du problème pour le milieu élastique, on suppose qu'il existe un tenseur du quatrième ordre appelé tenseur de localisation tel que :

$$\varepsilon_c = A : \varepsilon \quad (9)$$

$$\sigma_c = B : \sigma \quad (10)$$

où A est le tenseur de localisation des déformations et B le tenseur de localisation de contrainte introduits par Hill [11] qui dépendent de la microstructure du système

La relation entre le tenseur des rigidités du composite et celui de ses constituants est donnée par :

$$C = C_m + V_c (C_c - C_m) : A \quad (11)$$

Cette forme est générale dans le cas des milieux à deux phases.

Et la relation de souplesse est donnée par :

$$S = S_m + V_c (S_c - S_m) : B \quad (12)$$

Le problème est donc de savoir déterminer les tenseurs de localisation des contraintes et des déformations.

#### 3.2. Approche de Voigt

L'hypothèse de Voigt [4] consiste à considérer une déformation identique dans tout le composite ( $\varepsilon_c = \varepsilon$ ), le tenseur A est donc partout réduit au tenseur identité. On a donc :

$$E^V = E_m + V_c (E_c - E_m) \quad (13)$$

$$k^V = k_m + V_c (k_c - k_m) \quad (14)$$

#### 3.3. Approche de Reuss

L'hypothèse de Reuss [5], consiste à prendre :  $\sigma_c = \sigma$ . Dans ce cas, le tenseur B est donc partout réduit au tenseur identité :

$$E^R = \frac{E_m E_c}{E_c + V_c (E_m - E_c)} \quad (15)$$

$$k^R = \frac{k_m k_c}{k_c + V_c (k_m - k_c)} \quad (16)$$

#### 3.4. Approche de Mori-Tanaka

Dans ce modèle [8], on suppose que la chènevotte a les mêmes propriétés que la matrice et on tient aussi compte de l'interaction entre les renforts. L'estimation des modules est donc :

$$E^{MT} = E_m + V_c \frac{E_c - E_m}{1 + (1 - V_c)(E_c - E_m) \frac{E^{Esh}}{E_m}} \quad (17)$$

$$k^{MT} = k_m + V_c \frac{k_c - k_m}{1 + (1 - V_c)(k_c - k_m) \frac{E^{Esh}}{k_m}} \quad (18)$$

#### 3.2. Approche Auto-cohérente

Pour ce modèle, on suppose que chaque inclusion est entourée par un milieu continu équivalent dont le tenseur des rigidités est égal au tenseur des rigidités effectives globales inconnues [7]. Pour un composite biphasé, une solution analytique permet d'exprimer les caractéristiques élastiques recherchées à savoir :

$$E^{AC} = E_m + V_c \frac{E^{AC}(E_c - E_m)}{E^{AC} + E^{Esh}(E_c - E^{AC})} \quad (19)$$

$$k^{AC} = k_m + V_c \frac{k^{AC}(k_c - k_m)}{k^{AC} + E^{Esh}(k_c - k^{AC})} \quad (20)$$

Ces expressions qui donnent les modules, par ailleurs en fonction d'eux-mêmes, ne peuvent être mises en œuvre que numériquement et par un procédé itératif.

#### 3.3. Approche de Hashin-Strikman

Hashin et Shtrikman [6] font des estimations à partir de la solution d'Eshelby [12, 13], en considérant le matériau homogène équivalent entourant les particules du composite. Ces bornes s'écrivent sous la forme :

$$C^{HS+} \leq C_{com}^{HS} \leq C^{HS-} \quad (21)$$

La borne supérieure du module de Young :

$$E^{HS+} = [V_c E_c : (E_{max}^* + E_c)^{-1} + V_m E_m : (E_{max}^* + E_m)^{-1}] \times [V_c (E_{max}^* + E_c)^{-1} + V_m (E_{max}^* + E_m)^{-1}]^{-1} \quad (22)$$

La borne inférieure du module d'Young :

$$E^{HS-} = [V_c E_c (E_{min}^* + E_c)^{-1} + V_m E_m (E_{min}^* + E_m)^{-1}] \times [V_c (E_{min}^* + E_c)^{-1} + V_m (E_{min}^* + E_m)^{-1}]^{-1} \quad (23)$$

$$\text{Avec} \begin{cases} E_{max}^* = (E^{Esh})^{-1} : E_{max} - E_{max} \\ E_{min}^* = (E^{Esh})^{-1} : E_{min} - E_{min} \end{cases} \quad (24)$$

La borne supérieure du module de compressibilité :

$$k^{HS+} = [V_c k_c (k_{max}^* + k_c)^{-1} + V_m k_m (k_{max}^* + k_m)^{-1}] \times [V_c (k_{max}^* + k_c)^{-1} + V_m (k_{max}^* + k_m)^{-1}]^{-1} \quad (25)$$

La borne inférieure du module de compressibilité :

$$k^{HS-} = [V_c k_c (k_{min}^* + k_c)^{-1} + V_m k_m (k_{min}^* + k_m)^{-1}] \times [V_c (k_{min}^* + k_c)^{-1} + V_m (k_{min}^* + k_m)^{-1}]^{-1} \quad (26)$$

$$\text{Avec} \begin{cases} k_{max}^* = (E^{Esh})^{-1} k_{max} - k_{max} \\ k_{min}^* = (E^{Esh})^{-1} k_{min} - k_{min} \end{cases} \quad (27)$$

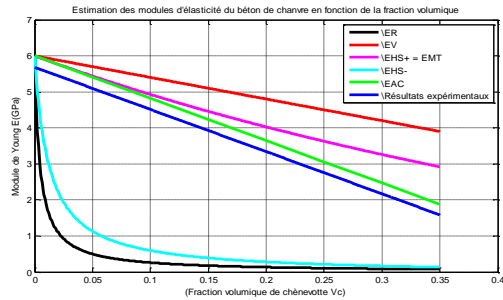
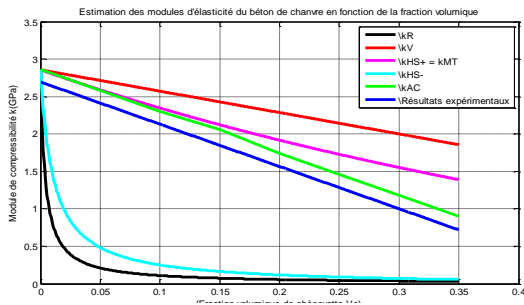
### 4- Estimation du comportement mécanique des bétons de chanvre

La validation des résultats se fait par la comparaison entre les résultats des prédictions des propriétés élastiques du béton chaux-chanvre avec les données expérimentales. Les propriétés mécaniques de chènevotte et de chaux sont données dans le tableau ci-dessous :

**Tableau** : Paramètres utilisés pour estimer les propriétés mécaniques

Composantes	Module d'Young E	Coefficient de Poisson $\nu$
Chènevotte	0,93 MPa [14]	0,10 [14]
Chaux	6 GPa [9]	0,15 [9]

Les figures ci-dessous montrent la variation du module de Young (Figure 2) et le module de compressibilité (Figure 3) en fonction de la fraction volumique.

**Figure 2** : Modules d'Young du béton chaux-chanvre en fonction de la fraction volumique.**Figure 3** : Modules de compressibilité du béton chaux-chanvre en fonction de la fraction volumique.

Sur les figures 2 et 3, les résultats expérimentaux obtenus sont confrontés aux estimations du comportement obtenu par les approches de Mori-Tanaka, Auto-cohérente, Hashin-Strikman, ainsi que les bornes de Voigt et de Reuss.

Nous observons que les données expérimentales sont bien comprises entre les bornes de Voigt et Reuss et entre les bornes resserrées de Hashin-Strikman. La cohérence des résultats obtenus valide l'application des théories utilisées aux composites chaux-chanvres. Dans l'ensemble, les méthodes d'homogénéisation surestiment les modules d'élasticité du béton chaux-chanvre. Il est à noter que le module d'élasticité du béton chaux-chanvre varie quasi linéairement avec la fraction volumique de chènevotte et ce jusqu'à une fraction volumique de 35%.

## 5- Conclusion

Ce travail s'est intéressé à l'étude des propriétés mécaniques du béton chaux-chanvre par des approches théoriques basées sur l'utilisation des caractéristiques de la chaux et de la chènevotte. L'incorporation des chènevottes permet de renforcer la ductilité de la chaux et en occurrence ses performances. La diminution du module d'élasticité avec l'augmentation de la fraction volumique des chènevottes est due au fait que la rigidité des chènevottes est

très inférieure à celle de la chaux. Les modèles d'homogénéisation surestiment les modules d'élasticité du béton chaux-chanvre. Les estimations réalisées par l'approche auto-cohérente sont davantage en accord avec les observations expérimentales.

## 6- Références

- [1] S. Liuzzi and al, Use of agro-wastes in building materials in the Mediterranean area: a review. *Energy Procedia*, 2017, 126, 242-249..
- [2] G. Gauthier, *Art Can- Construction en chanvre* 2018..
- [3] A. KABORE, Modélisation hygrothermique de l'enveloppe du bâtiment avec le matériau de chanvre. Mémoire pour l'obtention de la Maîtrise. Université du Québec (Ecole de Technologie Supérieure, 2019.
- [4] L. J. Voigt, Uber die beziehung zwischen den beiden elasticitatsconstanten isotroper körper, *Wied. Ann. (Lehrbuch der kristallphysik, Teubner,Leipzig)*. 33, 573-587.1889.
- [5] A. Reuss, Berechnung der fließgrenza von mischkrystallen auf grund der plastizität itsbedingung für einkristalle, 1929, pp. 49-58.
- [6] Z. Hashin et S. Shtrikman, « A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials », *Journal of the Mechanics of solids* 11, 123-140, 1963..
- [7] R. Hill, Self-consistent mechanics of composite materials, *Journal of the mechanics and physics of solids*. 13, 213-222, 1965.
- [8] T. Mori et K. Tanaka, Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metallurgica* 21, 571-574, 1973.
- [9] T. H. Pham et al., « Étude expérimentale, théorique et numérique de l'élasticité de composites chaux-chanvre », 2013, pp. 1-7.
- [10] S. B. MOHAMED, Détermination du volume élémentaire représentatif (VER) et les propriétés macroscopiques d'un matériau hétérogène à microstructure aléatoire. Thèse Doctorat, Université de Batna 2, 2018.
- [11] R. Hill, Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principes., 1963, pp. 357-372.
- [12] C. E. ADADJA, Modélisation multi-échelles des propriétés élastiques du composite argile-pailles de riz. Thèse de Doctorat, Université de Lorraine, 2020, pp. 41-45.
- [13] J. D. ESHELBY, The determination of the elastic field of the ellipsoidal inclusion an related problems, *Proceedings of the Royal Society of London A*241, 376-395,1957.
- [14] V. Cerezo, "Propriétés mécaniques , thermiques et acoustiques d'un matériau à base de particules végétales : approche expérimentale et modélisation théorique.", Lyon, 2005.

## EFFET DU TRAITEMENT THERMIQUE SUR LA MICROSTRUCTURE DES MORTIERS ELABORES A BASE DE DECHETS STERILES DE CHARBON.

### THE HEAT TREATMENT EFFECT ON THE MICROSTRUCTURE OF MORTARS MADE FROM STERILE COAL WASTE.

R. ADDOU<sup>1</sup>, Z. ZENASNI<sup>2</sup>, K. HANNAWI<sup>3</sup>, M. ZENASNI<sup>1</sup>, W.P. AGBODJAN<sup>3</sup>

1. Laboratoire de Mécanique et de Calcul numérique 'LM2N', Ecole Nationale des Sciences Appliquées, Oujda, Maroc – [rajaeaddou@gmail.com](mailto:rajaeaddou@gmail.com)
2. Laboratoire des Sciences et Métiers de l'Ingénieur, ENSAM, Université Moulay Ismail, Meknès, Maroc - [zenasniziyad@gmail.com](mailto:zenasniziyad@gmail.com)
3. Laboratoire Génie Civil et Génie Mécanique 'LGCGM', INSA de Rennes, Rennes, France - [Kinda.Hannawi@insa-rennes.fr](mailto:Kinda.Hannawi@insa-rennes.fr)

#### Abstract

This study completes the test campaign carried out for the physical and mechanical characterization of light mortars produced with coal waste, from the city of Jerada (northeast of Morocco) and heat treated at 600°C. It will focus on the effect of heat treatment on the microstructure of the cement matrix, before and after incorporation of waste by volume substitution of sand in composites. In this analysis, we used two tests: scanning electron microscopy and nitrogen adsorption/desorption test.

The results found confirm the increase in porosity observed on a more global scale and approve all the physical properties detected in the mortars, and therefore support the development of an eco-friendly building material.

#### Résumé

Cette étude vient compléter une série d'essais faite dans le cadre de la caractérisation sur le plan physique et mécanique des mortiers légers à base de stériles de charbon de la ville de Jerada (Oriental du Maroc) traités thermiquement à 600°C. Elle sera focalisée sur l'effet du traitement thermique sur la microstructure de la matrice cimentaire, avant et après incorporation des déchets en substitution volumique du sable dans les composites. Dans cette analyse, nous nous sommes basés sur deux essais : microscopie électronique à balayage et essai d'adsorption/désorption d'azote.

Les résultats trouvés confirment l'augmentation de la porosité observée à une échelle globale, et approuvent donc l'ensemble des propriétés physiques décelées dans les matériaux élaborés, favorables à l'élaboration d'un éco-matériau de construction.

**Mots clés :** *Traitement thermique, déchets de charbon, distribution poreuse, microscopie électronique à balayage, adsorption/désorption d'azote.*

**Keywords:** *Heat treatment, coal waste, porous distribution, scanning electron microscopy, nitrogen adsorption/desorption*

#### 1. Introduction

L'évaluation de l'effet de l'incorporation des déchets de charbon sur la porosité accessible à l'eau, montre à 90 jours de cure que le mortier témoin (0%) est moins poreux que les mortiers contenant les déchets de charbon. Effectivement, il présente une porosité de 20,43%, moins que les mortiers avec 10%, 20% et 50% d'ajouts respectivement [1], ainsi une légère hausse de porosité communicante est observée.

Après le traitement thermique de ces mortiers à 400°C, et surtout à 600°C, l'accroissement de la porosité est plus remarquable. Ainsi, sur les mortiers contenant 50% de stériles, la porosité est de 23,4% pour les mortiers traités à 400°C et de 25,69% pour les mortiers traités à 600°C, soit une augmentation de 5% par rapport au mortier sans déchets et sans traitement thermique. Cette augmentation est essentiellement due à la combustion du charbon contenu dans les stériles, aux alentours de 530°C [2], laissant place à plus de pores en plus des fissurations générées par le retrait à la suite de l'élévation de température des mortiers. Voir figure 1.

Pour mieux interpréter ces résultats, nous avons procédé à une analyse à l'échelle microstructurale des mortiers composites pour déceler plus profondément l'effet de l'ajout des déchets de charbon dans les mortiers, mais encore l'effet du traitement thermique sur leur microstructure.

Cette analyse a été effectuée par microscopie électronique à balayage sur des fragments de mortiers, puis par essai d'absorption/désorption d'azote sur la poudre de mortier. Le déroulement de ces essais ainsi que leurs résultats feront l'objet de la présente étude.

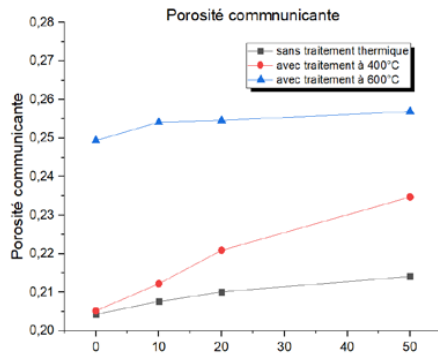


Figure 1 : Evolution de la porosité dans les composites avec le traitement thermique [1]

## 2. Effet de la température sur la distribution poreuse des mortiers composés

On procédera dans ce qui suit à une analyse à petite échelle de la distribution poreuse des mortiers élaborés à base de déchets de charbon, en comparant celle pour les mortiers sans traitement thermique avec celle des mortiers traités à 600°C.

### 2.1 Microscopie électronique à balayage

La microscopie électronique est une technique de caractérisation directe des matériaux mésoporeux. Elle permet de visualiser directement la morphologie des particules. Pendant l'essai, la surface de l'échantillon est balayée à l'aide d'un faisceau d'électrons de très haute énergie. L'interaction entre les électrons et l'échantillon provoque la formation d'électrons secondaires de plus faible énergie. Ils sont amplifiés puis détectés et convertis en un signal électrique. Ce processus est réalisé en chaque point de l'échantillon par un balayage du microscope.

Pour notre étude, les analyses ont été effectuées au Centre de Microscopie Electronique à Balayage et microAnalyse de l'Université de Rennes 1. L'appareil utilisé est un MEB à effet de champ de marque Jeol JSM 6301F.

### 2.2 Essai d'adsorption/ désorption d'azote

Le principe d'adsorption repose sur la propriété qu'ont les corps solides (adsorbants) de fixer sur leur surface certains gaz (adsorbats). Le phénomène inverse, par lequel les molécules adsorbées sur une surface s'en détachent sous l'action d'une baisse de pression, se nomme la désorption.

L'essai a été réalisé à l'aide de l'analyseur Micromeritics Gemini VII 2390, à l'INSA de Rennes. Avant de commencer l'essai, l'échantillon de poudre introduit dans un tube, est préalablement soumis à un dégazage sous vide, à 105°C jusqu'à ce que la pression dans le tube devienne inférieure à 0,01 mbar. Ce dégazage dure environ 12 heures et a pour objectif de chasser toute l'humidité résiduelle dans la poudre.

Ensuite, le tube est mis en place et de l'azote gazeux y est injecté simultanément et en parallèle avec un second

tube contenant un matériau de référence. Tout au long de l'essai, les deux tubes sont immergés dans de l'azote liquide de manière à maintenir la condition isotherme.

## 3. Résultats et Discussions

Les images de MEB (microscopie électronique à balayage) de la figure 2 montrent une interface entre les déchets et la matrice cimentaire très poreuse avec beaucoup de fissurations en comparaison avec celle existant entre la matrice cimentaire et le sable classique, ce qui expliquerait l'effet du remplacement du sable par les stériles de charbon sur l'accroissement du taux de porosité.

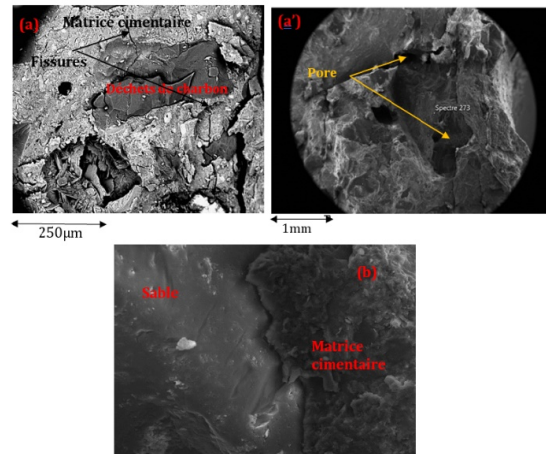


Figure 2 : Images du MEB montrant l'interface poreuse entre un granulat de déchets de charbon et la matrice cimentaire (a) et (a') en comparaison à celle entre le sable classique et la matrice cimentaire (b).

Dans cette étude, la distribution poreuse a été déterminée sur la poudre de mortier, en analysant pas à pas la branche de désorption de l'isotherme de sorption-désorption d'azote. Nous avons utilisé la méthode BJH qui relie les données thermodynamiques (isotherme de sorption) et les données géométriques (distribution des tailles des pores).

La méthode BJH [3] est classiquement utilisée avec l'azote à 77°K comme gaz adsorbant (à cette température, l'azote est à l'état liquide, très refroidi, stocké dans une bonbonne à 1 atm. Il a l'apparence d'un liquide limpide, d'où s'échappent des vapeurs blanches). Pour pouvoir l'appliquer, on suppose que les pores sont rigides et de forme bien définie (cylindriques, plans parallèles, empilement de sphères), et qu'on n'a que des mésopores ( $2 \text{ nm} < r < 50 \text{ nm}$ ) comme type de pores. On considère également que le remplissage d'un pore ne dépend pas de sa localisation dans le réseau poreux et que l'adsorption dans le pore se produit selon les mêmes principes qu'elle se produirait sur une surface ouverte. Nous avons limité l'essai au mortier contenant 50% de stériles que nous avons comparé au mortier témoin (0%). Les résultats obtenus sont représentés sur les figures 3 et 4,

où on évalue le volume des pores en fonction de leur taille, pour les deux types de mortiers d'abord avant leur traitement thermique, et ensuite après qu'ils ont subi un traitement à 600°C (température à laquelle les déchets de charbon subissent une importante perte de masse, Addou et al [2]).

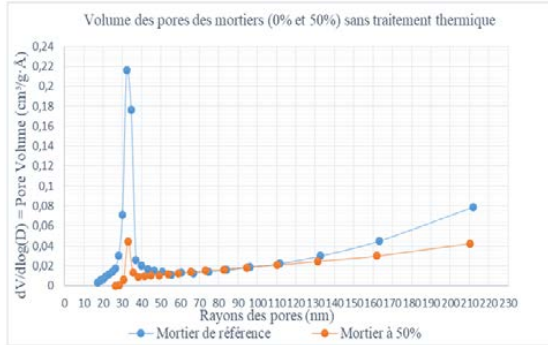


Figure 3 : Volume des pores des mortiers 0% et 50% avant traitement thermique

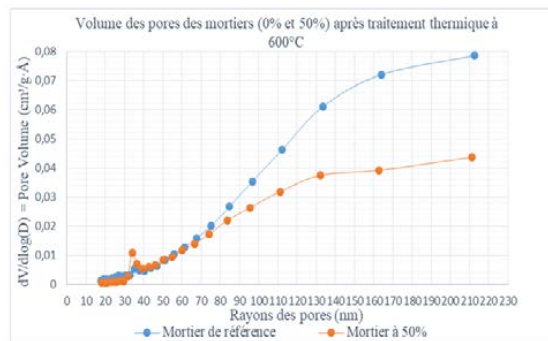


Figure 4 : Volume des pores des mortiers 0% et 50% après traitement thermique à 600°C.

On remarque donc la présence de deux familles de pores dans nos mortiers, à savoir les mésopores de rayon inférieur à 50 nm, et les macropores de rayon supérieur à 50 nm.

Avant de faire le traitement thermique des composites, on voit bien que le volume des mésopores est très grand dans le mortier de référence par rapport au mortier avec 50% de déchets de charbon. Ceci est dû au fait que les poudres fines que contiennent les stériles de charbon remplissent les mésopores, et donc diminuent leur volume. Cependant, on n'observe pas de différence de volume des macropores qu'à partir des rayons supérieurs à 140 nm, une légère différence ne dépassant pas  $0,04 \text{ cm}^3/\text{g.Å}$ .

Quant aux mortiers traités thermiquement à 600°C, on voit qu'ils présentent quasiment la même distribution poreuse pour les rayons ne dépassant pas 70 nm, c'est-à-dire les mésopores et une partie des macropores. On note que le pic du volume des pores est plus grand pour les mortiers avec déchets que celui des mortiers sans déchets. Ceci montre que le volume des mésopores est plus important pour les composites à base de déchets, chose qu'on pourrait expliquer par la libération de vides après la combustion du carbone contenu dans les déchets, ainsi que par l'apparition de fissures au niveau des interfaces pâte de ciment/grains de

déchets. Sinon, à partir des rayons supérieurs à 70 nm, on remarque le grand volume des macropores dans le mortier 0% par rapport au mortier avec 50% de déchets de charbon. Ces macropores apparaissent dans le mortier sans ajout vu la décomposition de la portlandite après traitement thermique, générant une grande taille des pores. Ceci rejoint les résultats des travaux de Alonso et al. [4] où on voit qu'à partir de 450°C, le système poreux se déplace légèrement vers les plus gros pores. Concernant les mortiers avec 50% d'ajouts, la baisse dans le volume des pores serait entraînée par le phénomène de frittage : « *Le frittage est la consolidation par action de la chaleur d'un agglomérat granulaire plus ou moins compact, avec ou sans fusion d'un ou de plusieurs de ses constituants* » [5]. Ce phénomène pourrait être responsable de la diminution de la taille des pores dans les mortiers, à la suite d'un gonflement granulaire.

### 3. Conclusion

Ainsi, on voit bien que le traitement thermique accompagné de l'incorporation des stériles de charbon dans les mortiers, en substitution partielle du sable, entraîne une modification dans la microstructure de la matrice cimentaire, qui consiste en l'augmentation de la porosité communicante et de la quantité des vides. Ceci vient justifier et approuver un ensemble de propriétés physiques déjà étudiées [1], notamment : la hausse de la perméabilité au gaz, la baisse de la vitesse de propagation des ondes ultrasonores par rapport au mortier de référence. Finalement, ces modifications peuvent être favorables pour une exploitation de ces matériaux élaborés dans l'isolation acoustique contre les bruits et les nuisances sonores en l'appliquant dans le remplissage des murs de construction.

### Références

- [1] R. Addou, Elaboration et Caractérisation physico-mécanique de mortiers de construction à base de déchets stériles de charbon de la mine de Jerada (Maroc Oriental), Thèse, Université Mohamed 1<sup>er</sup>, 2018.
- [2] R. Addou, K. Hannawi, W.P. Agbodjan, M. Zenasni, Characterization of Moroccan Coal Waste (Jerada Mine): Impact on Physical Properties of Mortars Made of Coal Waste, J. Mater. Environ. Sci. 8 (10) (2017) 3473-3482.
- [3] E.P. Barrett, L.G. Joyner, P.P. Halenda, The determination of pore volume and area distributions in porous substances. I. Computations from nitrogen isotherms, Journal of the American Chemical Society, Vol 73 (1951) 373-380.
- [4] C. Alonso, C. Andrade, G.A. Khoury, Porosity and micro cracking, Cours sur l'effet de la chaleur sur le béton, Italy, 2003.
- [5] J.M. Maussionne, Céramiques pour l'électronique et l'électrotechnique, Livre, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2002.

## **Thème 04 :**

# **Conception et production intégrées, Procédés de fabrication**

## Controlled speed sheet metal drawing of an AA 3003-H12 alloy dome

R .BENMESSAOUD<sup>1</sup>, A.MOUCHTACHI<sup>1</sup>

<sup>1</sup>.ENSAM of Casablanca, Hassan II University, Casablanca, Morocco, radouane.benmessaoud@gmail.com

### Abstract

In this paper, a new sheet metal drawing method, using a drilling machine, is presented. A test apparatus and suitable tooling are designed and manufactured to be installed in the machine. Preliminary tests are carried out to establish the appropriate experimental conditions (Feed rate, rotational speed, lubricant and lubrication method) of producing a reference dome from an AA 3003-H12 alloy sheet. The feed rate effect on the part geometry and structural integrity is then conducted. The results show that medium feed rates reduce geometric error to less than 10% while low ones reduce thickness drop to 28%.

Keywords: Drawing process; hemispherical tool; Drilling machine; AA 3003; dome; Sheet metal forming.

### 1. Introduction

The increased market demand in terms of sheet metal domes has pushed scientists to develop powerful tools allowing their successful production and its improvement (reduction of costs, increase in quality, etc.). In sheet metal drawing, researchers have used mechanical or hydraulic presses, blanks clamped around their edges, hemispherical head punches and lubricants to make such components [1-5]. In addition to these components, some authors have used, dies to increase the geometric precision [6]. In these studies, the punch moves with a constant speed and no rotation is involved, which limits the process flexibility. However, recent incremental forming processes studies (e.g. [7]) show the deformation zone sensitivity to feed rate and rotational speed. Despite the meaningful published works, there is not yet a study showing the sheet deformation response to feed rate variation in dome manufacturing tests.

In this paper, dome drawing tests, with the possibility to control the feed rate and rotational speed, are conducted. An experimental device is designed and manufactured to conduct the experiments. A drilling machine is used to control the tool motion (rotational speed, feed rate and penetration). A study of the tool feed rate effect on the sheet deformation is carried out. The deformation is characterized by the final part geometric profile and thickness distribution.

### 2. Materials and Methods

An experimental apparatus composed of a die, a blank holder and a 10 mm diameter hemispherical punch is designed and manufactured (see figure 1 (a)). A screw-nut system ensures sufficient clamping pressure to keep the blank blocked between the die and the blank holder. The test device is designed to fit a conventional drilling machine (Figure 1(b)). A centering system is manufactured to ensure the die/spindle co-axiality when mounting the device in the machine; a 20 mm diameter shaft is fabricated and ground, it is centered using a drill bit center, mounted on the drilling machine, then inserted into the die-bore (figure 1 (a)).

Cylindrical tools, with hemispherical heads are fabricated using a CNC turning machine. These ones are manufactured from a Z160 steel alloy (AISI D2) whose properties are illustrated in [2]. The measured hardness of the tools is 75 HRA. Square-shaped blanks of 30 mm square, 1 mm thick and in Aluminum alloy (AA 3003-H12) are cut on a Guillotine Shear machine. The physical and mechanical properties of AA3003-H12 alloy sheets are illustrated in the work of Benmessaoud et al.[8].

For the process parameters (rotational speed, feed rate, lubrication) tests, we adopt a reference part whose dimensions are shown in Figure 1 (d).

To measure the distance from the measuring point to the (OY) axis (figure 1 (d)), the part (figure 1 (c)) is first put on its horizontal plane so as to have the plane (OYZ) parallel to the horizontal table plane. In this case, it is held using the modelling clay and the distance between the measuring point and the horizontal table plane is then measured using a marking gauge, the distance from the measuring point to the axis (OY) is finally deduced by a simple transformation. At least, three measurements are made. The thickness measurement along the median plane (OXY) (figure 1(d)) makes it possible to follow its variation according to the distance between the measuring point and the axis (OY). Thickness is measured at the scribe points using a micrometer Gauge (Mitutoyo 112-201) with an accuracy of

±0.01mm. Five measurements are made and the average value is retained.

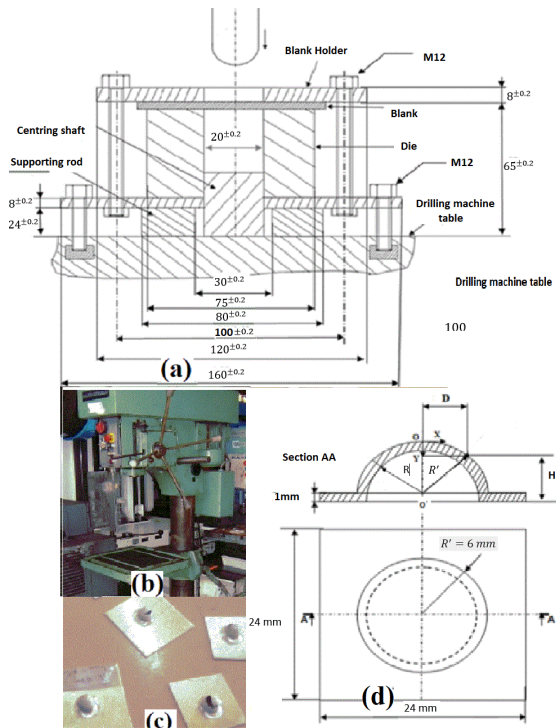


Figure 1: (a) Sheet metal domes drawing apparatus (b)Drilling machine (c) Manufactured parts (d) Reference part dimensions

The reference part outer surface geometric profile (figure 1(d)), measured along the (OXY) plane is used compare the geometric profiles obtained by feed rate tests. It can be defined as follows:

$$H = e_0 + \sqrt{R'^2 - D^2}, D < R'$$

And ,

$$H = e_0, D \geq R'$$

With:

H: the measurement point depth relative to the horizontal part surface (in contact with table) (figure 1 (d)).

D: distance from the measurement point to the (OY) axis (figure 1 (d)).

$e_0$ : blank thickness

R: tool radius.

$$R' = R + e_0$$

### 3. Results and discussion

#### 3.1. Geometric profil and thickness distribution

The theoretical and the experimental geometric profiles obtained using a punch rotational speed of 703.7 rpm, a feed rate of 0.18 m/min, a mineral oil (Shell Tellus) as lubricant and tool penetration depth of 5 mm, are illustrated by figure 2. The geometric gap can reach 14% at the sheet/tool contact area. Regarding the sheet thickness, it undergoes a decrease up to 35%, followed by an increase, then a stabilization by increasing the distance. The decrease can be explained by the tensile stresses which prevail regarding the existing bending ones.

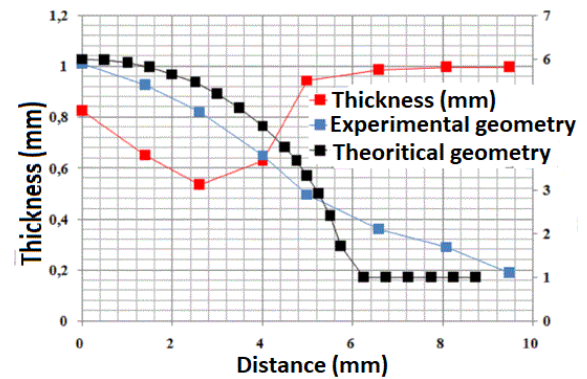


Figure 2: Thickness and vertical displacement at measuring points of the part

#### 3.2. Feed rate effect

Figure 3 illustrates the geometric profiles obtained by feed rate tests. A low feed rate increases the geometric gap by about 20% (relative to the theoretical profile) at the tool/sheet contact area while a very high feed rate increases the gap by about 10%.

Moreover, the geometric profiles gap does not exceed 10% using an average feed rate at the previous area.

Figure 4 illustrates the thickness variation obtained by feed rate tests. The thickness pattern shows the harmful effect of excessive speed increase. Indeed, the minimal thickness value decreases, with speed increase, up to 38%, which is significant. This can be explained by the thermal effect increase at the tool/sheet contact area due to the increase of relative motion between tool and blank. Indeed, for 1 mm of tool displacement, the number of performed revolutions



increases with decrease of feed rate, hence heat generated by friction increases, thus temperature increases which induces more springback, resulting finally in less deformation.

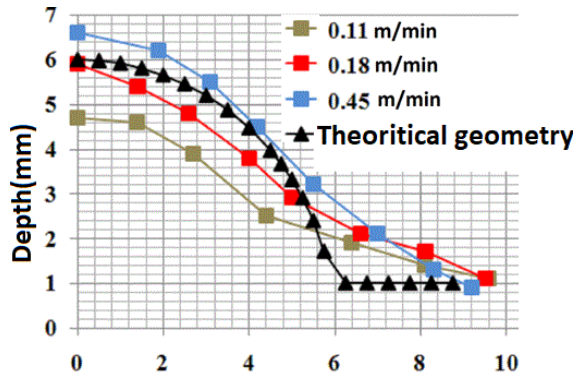


Figure 3: Geometric profile of the part obtained by feed rate tests

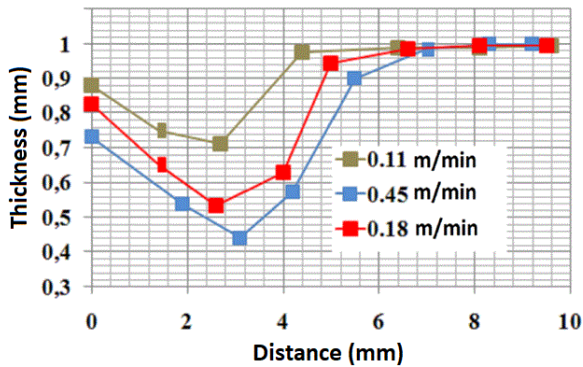


Figure 4: Thickness distribution in the final part obtained by feed rate tests

#### 4. Conclusion

In this work, an AA 3003-H12 dome is fabricated by sheet metal drawing process, using a drilling machine, with the possibility of controlling the feed rate and rotational speed. Preliminary tests allowed us to establish the appropriate experimental conditions for obtaining deformation without structural defects. Using a punch rotational speed of 703.7 rpm, a feed rate of 0.18 m/min, a mineral oil (Shell Tellus) as lubricant and tool penetration depth of 5 mm enabled us to manufacture parts with relative geometric error less than 14% (with reference to the

theoretical geometry) and with a thickness drop less than 35% (with reference to the initial blank thickness). The feed rate effect on the final parts characteristics is then studied. The results show that medium feed rates (0.18 m/min) reduces the geometric error up to 10% while low feed rates (0.11 m/min) reduce the thickness drop up to 28%.

#### References

- [1] K. Abass, A study on using pre-forming blank in single point incremental forming process by finite element analysis, IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, IOP Publishing, 2016, p. 012031.
- [2] H. Kansal, S. Singh, P. Kumar, Effect of silicon powder mixed EDM on machining rate of AISI D2 die steel, Journal of Manufacturing processes 9(1) (2007) 13-22.
- [3] G. Manikandan, R.K. Verma, P. Biswas, Effect of friction in stretch forming and its influence on the forming limit curve, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture 229(6) (2015) 973-981.
- [4] R. Padmanabhan, M. Oliveira, J. Alves, L. Menezes, Influence of process parameters on the deep drawing of stainless steel, Finite Elements in Analysis and Design 43(14) (2007) 1062-1067.
- [5] S. Panich, F. Barlat, V. Uthaisangskuk, S. Suranuntchai, S. Jirathearanat, Experimental and theoretical formability analysis using strain and stress based forming limit diagram for advanced high strength steels, Mat. Des. 51 (2013) 756-766.
- [6] M. Shakeri, A. Sadough, B. Dariani, Effect of pre-straining and grain size on the limit strains in sheet metal forming, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture 214(9) (2000) 821-827.
- [7] G. Ambrogio, S. Bruschi, A. Ghiotti, L. Filice, Formability of AZ31 magnesium alloy in warm incremental forming process, Int. J. Mater. Form. 2(S1) (2009) 5-8.
- [8] R. Benmessaoud, M. Radouani, Y. Aoura, B. El Fahime, Tool, lubricant and process parameters investigation to form an AA 3003-H12 sheet by single point incremental sheet forming process, Int. J. Sci. Eng. Res. 7(11) (2016) 950-916.

## Corrélation entre la rugosité initiale de la surface et les contraintes résiduelles lors d'une opération du toilage : Une nouvelle approche

### Correlation between the initial surface roughness and the residual stress field during belt-finishing process: A new approach

N. BOUKTIB<sup>1</sup>, A. KHELLOUKI<sup>2</sup>, M. AIT EL FKI<sup>3</sup>, W. BOUAB<sup>1</sup>

1. Laboratoire de Sciences de l'Ingénieur, ESTEM-Casablanca, Maroc + [n.bouktib@edu.umi.ac.ma](mailto:n.bouktib@edu.umi.ac.ma)

2. Département de Génie mécanique et des Structures, ENSAM-Meknès, Maroc + [khellouki\\_abdeljabar@yahoo.fr](mailto:khellouki_abdeljabar@yahoo.fr)

3. Département de Génie mécanique, ENSAM-Casablanca, Maroc + [m.aitelfkih@gmail.com](mailto:m.aitelfkih@gmail.com)

#### Abstract

Belt-finishing technology is known by its capability to improve the surface integrity of precision mechanical parts by means of multiple abrasive grains. In this work, the axial residual stress field, induced during repeated scratching on a rough hard-turned profile, is investigated numerically. The influence of the initial surface roughness on the residual stresses has been studied. The results show that the depth of the affected layer does not exceed 11  $\mu\text{m}$ , while the compressive residual stress field is stronger when the initial surface roughness is low. The numerical results are then used to propose a better application of the belt-finishing process.

#### Résumé

La technologie du toilage est connue par sa grande capacité à améliorer l'intégrité des pièces mécaniques de précision à travers un mouvement progressif et sinusoïdale des grains abrasifs. Dans ce travail, les contraintes résiduelles axiales, générées lors des rayures répétées sur un profil initial du tournage dur, sont modélisées numériquement. L'effet de la rugosité initiale de la surface sur le champ des contraintes résiduelles a été analysé. Les résultats montrent que la profondeur de la zone affectée ne dépasse pas 11  $\mu\text{m}$ . De plus, les meilleures contraintes de compression sont induites lors du rayage sur le profil du tournage dur qui possède la plus faible rugosité initiale. Les résultats numériques sont ensuite utilisés pour proposer une application optimale du toilage.

**Mots clefs :** Rayage répété, Contraintes résiduelles, Résistance à la fatigue, Superfinition par toilage, rugosité initiale de la surface, MEF.

**Keywords:** Repeated scratching, FE-Simulation, Residual stress field, Belt-finishing, Initial surface roughness.

#### 1. Introduction (12 gras)

La finition des pièces mécaniques de précision utilisées dans les secteurs automobile et aéronautique sollicite l'application des procédés d'usinage de précision, telles que la rectification et le tournage dur, qui restent tout de même insuffisants [1 – 2], ce qui conduit à l'utilisation d'autres procédés beaucoup plus précis dits de

superfinition. Ces procédés de superfinition sont appliqués pour obtenir des surfaces fonctionnelles de qualité et pour améliorer l'intégrité des pièces mécaniques hautement sollicitées nécessitant une très grande précision [3 – 4]. Parmi ces procédés figure la superfinition par bande abrasive dite toilage qui, tout en améliorant l'état de surface, pourrait augmenter la tenue à la fatigue et la résistance à l'usure des pièces mécaniques à travers une action progressive des grains abrasifs répandus sur un support en toile ou en papier [5] (voir Figure. 1).

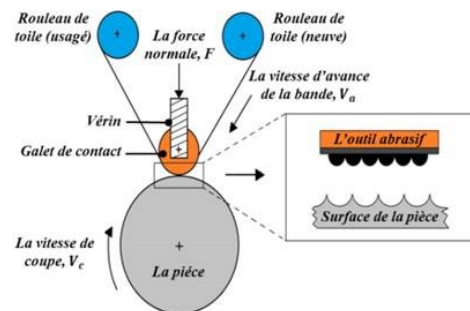


Figure 1 - Schéma représentatif du procédé de superfinition par toilage.

En plus de sa grande capacité d'améliorer l'état de surface, il a été montré que le procédé de toilage pourrait induire des contraintes de compression sur une faible profondeur [6, 7]. Par ailleurs, la distribution des contraintes résiduelles pendant un procédé de toilage est liée à l'action progressive et simultanée des grains abrasifs sur la surface de la pièce. D'après Kermouche et Rech et al. [6, 7], la modélisation de l'action d'un seul grain abrasif peut fournir des informations qualitatives acceptables sur l'évolution des contraintes résiduelles issues du procédé de toilage. Pourtant, pour tenir compte du contexte réel du toilage, une description améliorée de ses mécanismes doit être prise en compte en mettant en exergue les mouvements progressifs et répétés des grains de la bande abrasive ainsi que la rugosité initiale générée par les opérations d'usinage antérieures. Par conséquent, une modélisation numérique par éléments finis de

rayures répétées sur un profil rugueux du tournage dur est effectuée dans l'objectif d'analyser qualitativement l'effet de la rugosité initiale de la surface sur les contraintes résiduelles en toilage.

2. Méthodologie

2.1 Contexte du modèle

La technique de toilage est consacrée à l'amélioration de l'intégrité des pièces mécaniques tournées ou rectifiées. En tournage, le profil de la surface résultant de l'avance par tour de l'outil  $f$  et le rayon de bec de l'outil  $r_e$  est périodique. Cette texture peut être caractérisée par deux paramètres de rugosité qui sont : la hauteur totale de rugosité  $R_t$  (distance maximale de crête à vallée) et le pas des motifs de rugosité  $AR$ , comme il est illustré dans la Figure.2.

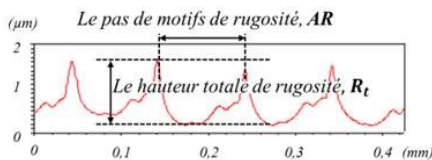


Figure 2 - Le profil réel de rugosité lors d'une opération du tournage dur d'un acier de roulement 100Cr6

Lors d'un procédé de toilage d'une pièce antérieurement usinée par tournage dur, le rayage progressif des grains abrasifs passe par deux régimes, illustrés dans la Figure. 3), et qui sont :

- **Un régime transitoire** (Figure. 2(a)) : c'est le premier régime de l'opération de toilage qui vise à diminuer les crêtes de la surface par enlèvement de matière jusqu'à atteindre les vallées du profil.
- **Un régime permanent** (Figure. 2(b)) : c'est le second régime du toilage dans lequel l'enlèvement de la matière est limité, alors que le polissage et le frottement sont prédominants, la forme de la surface sera donc stabilisée et le rayage est effectué sur une surface lisse.

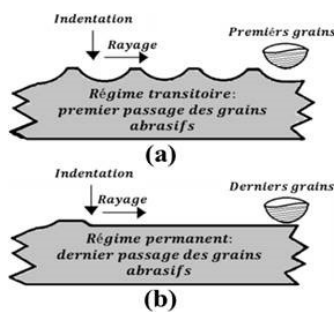


Figure 3 – Les régimes d'un procédé de toilage

L'action progressive des grains abrasifs sur un profil rugueux du tournage dur (Voir Figure. 4) est prise en compte pour avoir des résultats plus réalistes de la modélisation numérique de l'opération de toilage.

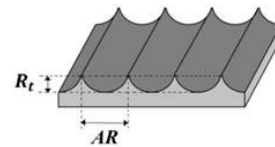


Figure 4 – Le profil du tournage dur simulé

2.2 Approche théorique

Dans cet article, une approche multi rayages, à déplacement imposé, entre un grain abrasif rigide et un profil rugueux du tournage dur est utilisée. Pour ce faire, l'approche théorique développée dans notre travail précédemment publié [8] est considérée pour calculer la profondeur de pénétration et son évolution pour une charge imposée constante.

L'approche théorique utilise le produit des équations adimensionnels, qui sont la pression moyenne de contact  $\bar{p}_m = \frac{P_m}{Y}$  et la surface de contact  $\bar{a} = \frac{a}{a}$ , pour calculer la profondeur de pénétration  $h$  lors d'une charge appliquée  $F_g$  par un indenteur de forme sphérique.

L'évolution de la profondeur de pénétration au cours des rayures est caractérisée par l'effet du retour élastique  $h_{res}$  et du phénomène d'écrouissage  $Y_{k+1}$ .

2.3 Modèle numérique

La modélisation numérique du rayage progressif est exécutée par le logiciel par éléments finis ABAQUS /Standard. Une boucle de quatre étapes est utilisée pour la réalisation du chargement quasi statique de l'indenteur. La première étape repose sur une pénétration verticale de l'indenteur avec une profondeur de pénétration prédéfinie. Ensuite, au cours de la deuxième étape l'indenteur se déplace horizontalement pour rayer la pièce. Finalement, l'indenteur retourne à sa position initiale pendant la troisième et la quatrième étape avec un mouvement vertical puis horizontal. Les indenteurs sont supposés sphériques rigides de rayon  $R_s = 50\mu m$ , alors que la pièce est un corps déformable en acier dur 100Cr6 de taille  $4 \times 0.5mm$  (voir Figure. 5), cette taille est choisie pour éviter les effets de bord et assurer la stabilité du champ de contraintes résiduelles. La surface de contact, entre l'indenteur et la pièce, contient un profil rugueux du tournage dur de  $R_t$  qui varie entre 1.5 et  $2.5\mu m$ , tandis que,  $AR$  est fixé à  $100\mu m$ . La condition de chargement consiste d'appliquée une force constante  $F_g = 3N$  vingt fois (le nombre de rayures répétées  $N_g = 20rayures$ ).

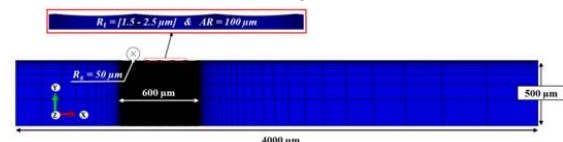


Figure 5 – La modélisation numérique du rayage répété sur une surface rugueuse issue du tournage dur

### 3. Résultats & Discussions

D'après la Figure. 6, il paraît que, quelle que soit la rugosité initiale du profil, l'augmentation du nombre de rayures améliore la contrainte de compression à l'interface. Lors des premières rayures, le contact s'effectue uniquement entre l'indenteur et les pics de la surface rugueuse, ce qui conduit à une non-homogénéité des contraintes résiduelles interfaciales à cause d'une forte variation de la déformation plastique le long du profil ondulé du tournage dur. Ainsi, des contraintes résiduelles de traction apparaissent en raison de la forte sévérité de contact entre l'indenteur et les pics de la surface, tandis que des contraintes résiduelles de compression apparaissent dans les vallées de la surface rugueuse, à cause de la faible sévérité de contact.

Par ailleurs, on constate que plus la rugosité de surface initiale est élevée, plus le temps nécessaire pour atteindre le régime stable de l'évolution de la déformation plastique est long (après la 9ème rayure pour  $R_t = 1.5\mu\text{m}$  et la 14ème rayure pour  $R_t = 2.5\mu\text{m}$ ). Finalement, après 20 rayures les contraintes résiduelles interfaciales de compression, qui deviennent stables pour les deux types de rugosité, sont légèrement plus fortes dans le cas d'une faible rugosité.

On peut dire qu'en toilage plus la rugosité initiale de surface est bonne plus les contraintes résiduelles interfaciales de compression sont importantes et rapidement stabilisées.

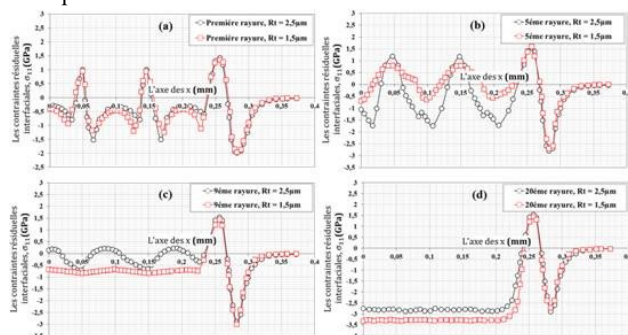


Figure 6 – Les contraintes résiduelles axiales à l'interface lors du rayage répété sur des surfaces de rugosité différente.

Concernant le champ de contraintes résiduelles axiales en profondeur, présenté dans la Figure. 7, il est clair que, quelle que soit la rugosité de surface initiale  $R_t$ , le champ de contraintes résiduelles de compression est modifié au-dessous d'une profondeur de  $11\mu\text{m}$ . La contrainte de compression maximale se situe à une profondeur de 3 à  $4\mu\text{m}$  et devient légèrement plus forte dans le cas d'une rugosité de surface initiale plus faible.

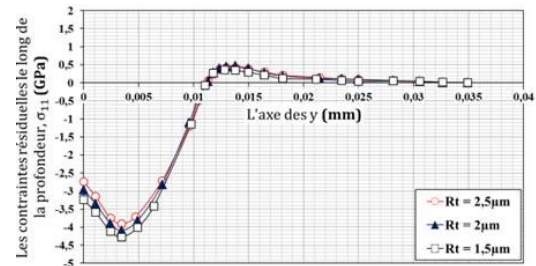


Figure 7 – L'influence de la rugosité initiale sur les contraintes résiduelles axiales le long de la profondeur après 20 rayures.

### 4. Conclusions

Dans ce papier, l'effet de la rugosité initiale de la surface sur le champ des contraintes résiduelles induit lors d'une opération de toilage est analysé numériquement. Les résultats montrent que, quelle que soit la valeur de la rugosité initiale de la surface, la profondeur de la zone affectée ne dépasse pas  $11\mu\text{m}$ . De plus, pour des valeurs plus faibles du  $R_t$ , les contraintes résiduelles de compression deviennent plus forte à cause du phénomène d'érouissage.

### Références (12 gras)

- [1] F. Klocke, E. Brinksmeier, K. Weinert, Capability profile of hard cutting and grinding processes. CIRP Ann (2008) 22–45.
- [2] M. Liu, Ji. Takagi, A. Tsukuda, Effect of tool nose radius and tool wear on residual stress distribution in hard turning of bearing steel. J Mater Process Technol (2004) 234–24.
- [3] W. Grzesik, J. Rech, T. Wanat, Surface finish on hardened bearing steel parts produced by superhard and abrasive tools, Int J Mach Tool Manufact (2007) 255–262.
- [4] W. Wang, F. Salvatore, J. Rech, J. Li, Comprehensive investigation on mechanisms of dry belt grinding on AISI52100 hardened steel. Tribol Int (2018) 310–320.
- [5] A. Khellouki, J. Rech, H. Zahouani, Influence of the belt-finishing process on the surface texture obtained by hard turning, Proc Inst Mech Eng Part B J Eng Manuf (2007) 1129–1137.
- [6] G. Kermouche, J. Rech, H. Hamdi, JM. Bergheau, On the residual stress field induced by a scratching round abrasive grain. Wear (2010) 269 86–92.
- [7] J. Rech, G. Kermouche, W. Grzesik, C. Garcia-Rosales, A. Khellouki, V. GarciaNavas, Characterization and modelling of the residual stresses induced by belt finishing on AISI52100 hardened steel. Journal of materials processing technology (2008) 187–195.
- [8] Bouktib N, Khellouki A. Investigation of belt-finishing effect on the residual stress field through repeated scratching on rough hard-turned surface. Tribol Int 2021; 153:106644.

## CONCEPTION POUR L'INJECTION PLASTIQUE Vs CONCEPTION POUR LE DEPOT DE FIL FONDU : ETUDE DE CAS DANS L'AUTOMOBILE

### DESIGN FOR FUSED DEPOSITION MODELLING VS DESIGN FOR INJECTION MOLDING: CASE STUDY IN THE AUTOMOTIVE INDUSTRY

S. Abouhazim<sup>1,2</sup>, A. Eljihad<sup>1,2</sup>, O. Lkadi<sup>1,2</sup>, M. Nassraoui<sup>2</sup>, and O. Bouksour<sup>2</sup>

1. National Higher School of Electricity and Mechanics, ENSEM, Hassan II University of Casablanca, Morocco.

2. Laboratory of Mechanics, Production and Industrial Engineering, LMPGI, Higher School of Technology of Casablanca, ESTC, Hassan II University of Casablanca, Morocco.

safaa.abouhazim-etu@etu.univh2c.ma, abdelghani.eljihad-etu@etu.univh2c.ma, omar.lkadi-etu@etu.univh2c.ma, mohammed.nassraoui@univh2c.ma, otmane.bouksour@univh2c.ma

ORCID identifier: <https://orcid.org/0000-0002-2272-2149>

#### Abstract

Layer by layer is how AM reaches every range of industries, its employability has greatly evolved from a prototyping stage to an alternative for conventional fabrication. FDM, an additive process that gains presence in the automotive field for polymeric materials. Within this revolution where the Design phase is of paramount importance, the DfM concept becomes DfAM. Therefore, this paper provides a comparative study between FDM and Injection Molding Design guidelines through a case study in the automotive industry namely, a component of the car seat: Height Adjuster Handle. Topology Optimization is also discussed in this document highlighting the freedom AM offers in the Design phase against traditional techniques.

#### Résumé

Couche par couche, la Fabrication Additive atteint tous les secteurs d'activité. Le Dépôt de Fil Fondu, un des procédés additifs pour polymères qui s'impose dans l'industrie automobile. Au sein de cette révolution où la phase conception est de grand intérêt, le concept DfM (Conception pour Fabrication) devient DfAM (Conception pour Fabrication Additive). D'où l'étude menée dans ce papier qui fournit une comparaison entre la conception pour le Dépôt de Fil Fondu et celle pour le moulage par injection à travers une étude de cas dans l'industrie automobile définissant les avantages de la Fabrication Additive par rapport aux techniques traditionnelles.

**Mots clefs :** Fabrication Additive, Dépôt de Fil Fondu, Optimisation topologique, Conception pour Fabrication Additive

**Keywords:** Additive Manufacturing, Fused Deposition Modelling, Topology Optimization, Design for Additive Manufacturing.

#### 1. Introduction

Complex shaped designs, material waste minimization and many other options are all now possible with the emergence of Additive Manufacturing (AM) [1]. Fused Deposition Modelling is one of the widely used AM processes for polymer materials [2]. In this technique, the material -in a filament format- is directed into a pre-heated nozzle, once in a molten state the material is extruded through the nozzle that moves gradually through the axes following the design specifications to the building platform forming a layer by layer 3D object [3], [4]. All previously mentioned points considered, AM is the main character in the new industrial wave: industry 4.0. It revolutionizes both the manner we design and fabricate which makes it necessary to throw the light on the evolution of the Design Guidelines, from DfM: Design for Manufacturing to DfAM: Design for Additive Manufacturing[5], [6].

By analogy between conventional and additive processes for polymers, FDM is the technical manufacturing twin of Injection Molding[3]. Interest in this topic led to this communication, which is articulated around the design aspect by comparing the design guidelines of Injection molding and FDM, then raising the issue of optimum design [6] using a lattice topology optimization through a case study in the automotive industry : height adjuster handle via commercial software ANSYS.

#### 2. Case study: design of a Height Adjuster Handle

The subject of this study is the design of Height Adjuster Handle which is a plastic component located on the car seat. Its main function is to allow the occupant to adjust the seat height. Based on an existing handle, the material chosen is ABS with dimensions given on table 1.

Height Adjuster Handle Characteristics		
Main function	Interface between occupant and Height Adjustment mechanism	
Secondary functions	→ Ergonomic → Environment	→ Aesthetic → Cost
Material ABS	Density 1030 kg/m <sup>3</sup> Yield Strength 2.744 e <sup>7</sup> Pa	Tensile Ult. Sgth 3.626 e <sup>7</sup> Pa Young's Modulus 1.628 e <sup>9</sup> Pa
Dimensions	L120*W22*D30 mm	

table 1. Height Adjuster handle characteristics

### 2.1 Design for Injection Molding

The injection molding includes a series of processes that need to be highly thought of during design phase, hence the necessity of establishing a meticulous approach of the design phase as described in figure 1.

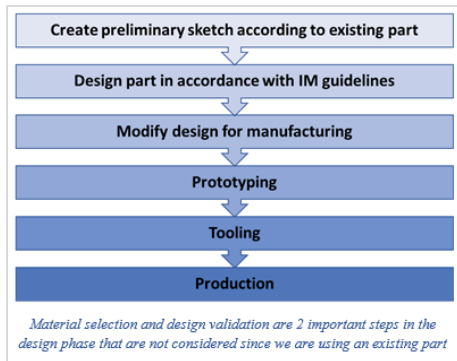


figure 1. Design methodology for Injection Molding

Preliminary model of the existing part: this step starts basically by an analysis of the part, its functional surfaces and overall dimensions while considering the aesthetic aspect. Below on figure 2, a first model designed via Catia V5 of the handle.



figure 2. Preliminary model of the existing part

Design following Injection Molding Guidelines: in this stage, the geometry specifications of the part are taken into account such as wall thickness, rib to wall ratio and sharp corners as shown in figure 3.

Design considering the manufacturing constraints: the injection molding parameters need to be considered upstream. For instance, the gate location, parting lines and draft angles definition [7], [8].

Prototyping, Tooling definition and Production: all these steps are considered post-design phase because iterations on the delivered design might be needed to launch the start of production [7].

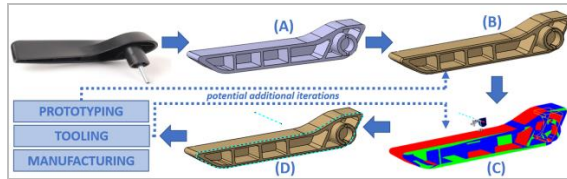


figure 3. Design evolution in Injection molding (A) Preliminary model (B) Updated wall thickness and sharp edges model (C) Draft analysis (D) Parting lines location and tooling direction

### 2.2 Design for Fused Deposition Modelling

Similarly to what preceded, a design methodology figure 4 for FDM is established of the same handle. A new design is created based on the topology lattice optimization which benefits from the freedom of shape complexity that the FDM offers.

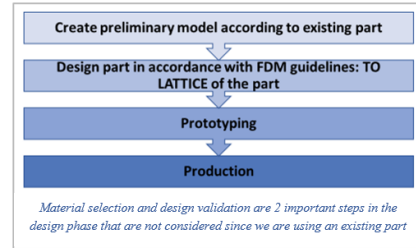


figure 4. Design Methodology for Fused Deposition Modelling

Preliminary model of the existing part: at this stage, there is no difference between AM and conventional processes because the target is performing a functional analysis. And naturally, the part functions will not differ from a process to another.

Before transitioning to the second step, a static analysis performed by Ansys (see results in figure 5) is essential in order to assess the mechanical behavior of the optimized part. It allows to have a threshold limit value of both stress and strain that the optimized design should not exceed.

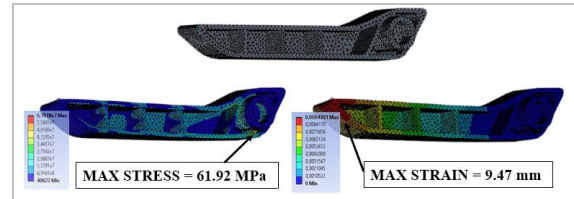


figure 5. Static Analysis results: handle resulting from Injection Molding design phase

Design following FDM Guidelines using Lattice Topology Optimization: before and after performing Lattice Topology Optimization, some geometrical parameters need to be verified on the handle CAD model such as: wall thickness and at the opposite of injection molding a uniform wall thickness is not a must[9]. Overhangs also need to be considered for a purpose of optimizing the manufacturing process. Then, holes need to be verified according to the print orientation to ensure a better quality for the part [9]. On the other hand 6 iterations are made for the Lattice TO as shown on figure 6. Next a static analysis validation is accomplished in order to ensure stress and strain did not surpass the initial values on figure 5.

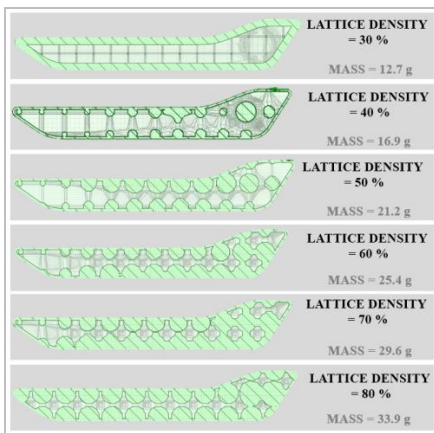


figure 6. Lattice Topology Optimization based handle results

The results of the validation analysis are listed on the table 2, both stress and strain values are less than the threshold limits. Therefore, the selected geometry is the 30% lattice density-based part since it attained  $\approx 70\%$  of mass optimization. The stress concentration occurs on the fixation support and maximal strain is observed at the extremity of the handle (like the behavior of the initial part) as demonstrated in figure 7.

Prototyping and Production: in the FDM case, no additional effort nor cost is required for the prototyping phase. A first printing is performed to analyze the resulting part and rectify any missed points in the design phase. After that, the part is ready to manufacture, no tooling required.

	Mass	Strain	Stress
<b>Initial part</b>	42.3 g	9.47 mm	61.9 MPa
<b>Lattice Optimized part</b>			
Density 30%	12.7 g	6.31 mm	51.4 MPa
Density 40%	16.9 g	2.63 mm	47.6 MPa
Density 50%	21.2 g	2.28 mm	34.1 MPa
Density 60%	25.4 g	2.14 mm	37.7 MPa
Density 70%	29.6 g	2.09 mm	34.1 MPa
Density 80%	33.9 g	2.03 mm	35.0 MPa

table 2. Static validation results of the lattice optimized geometries

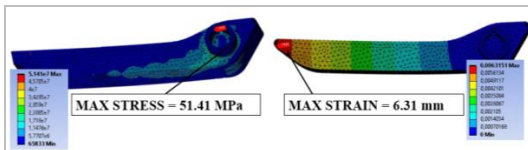


figure 7. Static Validation results of the selected optimized geometry (30% density-based lattice)

### 3. Results and discussion

Weight, part robustness, cost and time saving are the key parameters of this analysis. Initially, the FDM resulting weight is reduced by  $\approx 41\%$  in comparison with Injection Molding. This implies gained inertia at the automotive level, and cost saving regarding the material use. The validation study shows that the stress is less concentrated by 17% in the additively manufactured part. The strain is also reduced by 34% regarding injection molding. On the other hand, it is unquestionable that the design phase for injection molding is more time-consuming due to the significant number of iterations involved.

### 4. Conclusion

Minimizing design phase and product development lead time is of paramount importance in all industries, particularly automotive. In this paper, the authors highlight the AM assets enabling engineers to gain in mass, volume and time. The handle, a plastic part used in the car seat must have a pleasant appearance and adequate strength. The strength of the plastic part is closely related to the stress and strain. The presented results show that complex plastic parts can be easily reproduced by applying design technologies for additive manufacturing. Further work could be focused on the surface quality aspect of the printed parts while considering their mechanical properties.

### References

- [1] S. C. Daminabo, S. Goel, S. A. Grammatikos, H. Y. Nezhad, et V. K. Thakur, « Fused deposition modeling-based additive manufacturing (3D printing): techniques for polymer material systems », *Materials Today Chemistry*, vol. 16, p. 100248, juin 2020.
- [2] F. M. Mwema et E. T. Akinlabi, « Basics of Fused Deposition Modelling (FDM) », in *Fused Deposition Modeling: Strategies for Quality Enhancement*, F. M. Mwema et E. T. Akinlabi, Éd. Cham: Springer International Publishing, 2020, p. 1-15.
- [3] R. B. Kristiawan, F. Imaduddin, D. Ariawan, Ubaidillah, et Z. Arifin, « A review on the fused deposition modeling (FDM) 3D printing: Filament processing, materials, and printing parameters », *Open Engineering*, vol. 11, n° 1, p. 639-649, janv. 2021.
- [4] J. R. C. Dizon, A. H. Espera, Q. Chen, et R. C. Advincula, « Mechanical characterization of 3D-printed polymers », *Additive Manufacturing*, vol. 20, p. 44-67, mars 2018.
- [5] J. Plocher et A. Panesar, « Review on design and structural optimisation in additive manufacturing: Towards next-generation lightweight structures », *Materials & Design*, vol. 183, p. 108164, déc. 2019.
- [6] A. W. Gebisa et H. G. Lemu, « Design for manufacturing to design for Additive Manufacturing: Analysis of implications for design optimality and product sustainability », *Procedia Manufacturing*, vol. 13, p. 724-731, 2017.
- [7] R. A. Malloy, *Plastic part design for injection molding: an introduction*, 2nd ed. Munich : Cincinnati, Ohio: Hanser Publishers ; Distributed in the USA and in Canada by Hanser Publications, 2011.
- [8] D. M. Bryce, *Plastic Injection Molding: Material Selection and Product Design Fundamentals*. Society of Manufacturing Engineers, 1997.
- [9] O. Diegel, A. Nordin, et D. Motte, « Design for Polymer AM », in *A Practical Guide to Design for Additive Manufacturing*, Springer, Singapore, 2019, p. 93-101.

## Detailed study of endurance and takeoff distance effect on pre-sizing of unmanned aerial vehicle

A. KOTTAT<sup>1</sup>, M. E. AIT ALI<sup>2</sup>

1. Université Mohammed V de Rabat, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, ERG2(ME), Av. Ibn Sina, Rabat, Morocco  
kottat.amina@gmail.com
2. Université Mohammed V de Rabat, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, ERG2(ME), Av. Ibn Sina, Rabat, Morocco  
aitali@emi.ac.ma

### Abstract

The objective of this study is to investigate, in detail, the effect of endurance and takeoff distance on the result of an adapted pre-sizing of an unmanned aerial vehicle (uav). Pre-sizing method aims to define an initial geometry of the uav that necessitate little modifications in detailed dimensioning. Endurance and takeoff distance are two important parameters, among others, that the end user wishes to control. The formulas used in pre-sizing do not give a direct relation between these parameters and the initial geometry. For example, the takeoff mass is calculated using a non-linear equation. In this work, we start with a summary presentation of the pre-sizing method. Then, we conduct a parametric study of the effect of endurance and the takeoff distance in two cases, each with a specific requirement. The results will help to quantify and control the changes on the geometry in the early stages of an uav design project, to meet the end user expectations.

**Keywords:** *unmanned aerial vehicle, pre-sizing of uav, aircraft sizing, endurance effect on uav, takeoff effect on uav*

### 1. Introduction

The importance of pre-sizing is reflected in the determination of the initial geometry of an unmanned aerial vehicle noted (uav) [6]. This pre-sizing is a phase of the design of an uav according to a specification. We start by choosing the input parameters of the pre-sizing method (endurance, number of engines, ceiling, etc...) in concertation with the end user. However, this end user tends to wish to have bigger endurance and the smallest takeoff distance possible. To make a good compromise it is helpful to determine the influence of each parameter on the uav initial geometry. According to the formulas of the method proposed by Raymer [1] and Loftin [4], it is difficult to deduce directly the effect of each parameter on the initial geometry. In this work we focus only on: endurance and takeoff distance. Moreover, the takeoff distance has no effect on the initial geometry when the wing load exceeds a limit. The objective of this study is to determine, in detail, the effect of endurance, takeoff distance. In the first part, we start with a summary presentation of the adapted pre-sizing method for an uav

and relevant formulas to the two parameters in this method. After choosing a reference specification, we perform an analysis of the method's results when we change endurance and takeoff distance of the uav.

### 2. Pre-sizing method

In addition to the initial geometry, pre-sizing estimates different parameters of the uav: power-to-weight ratio, wing loading and takeoff weight. Fig.2.1 summarizes the steps of the method proposed by Raymer [1] and Loftin [4].

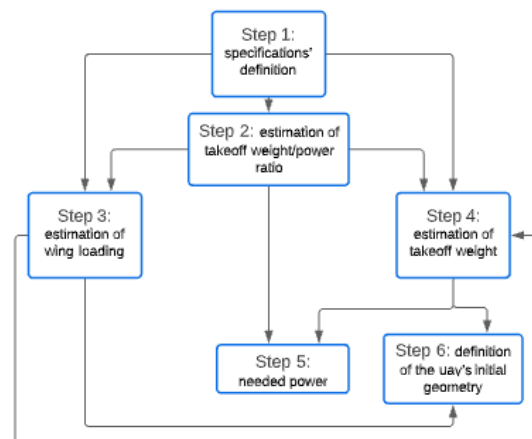


Fig.2.1: Steps of pre-sizing method of an uav

The first step consists in specifying the input data of this pre-sizing method in particular (takeoff distance, landing distance, endurance...), and selecting the number and type of engines, as well as the flight mission's segments.

In the second step, we estimate the takeoff weight to needed power ratio, ( $W_{TO}/P$ ), according to the formula recommended by [1].

In the third step, we estimate wing loading for the uav, weight to wing area ratio ( $W/S$ ), in the five situations: minimum stall speed, maximum cruising speed, during takeoff, during landing and during climbing (with maximum climbing rate). As a result, we chose the smallest wing loading of all the situations. In this step we used the proposed values given by Raymer [1]: maximum lift coefficient, maximum lift coefficient at takeoff ( $C_{L_{TO}}$ ) and at landing, aspect ratio and zero-lift drag coefficient. In the fourth step, to estimate the takeoff weight  $W_{TO}$ , we will start by estimating the fuel mass fraction and the fuel



mass fraction for different flight phases denoted respectively by  $FM_{ca}$  and  $FM_{ca,i}$  [1]. In this application, we have chosen a single cruise flight mission with five segments in the uav mission (takeoff segment, climb segment, landing segment, cruise segment and float segment) based on the data from [1] for a propeller engine. Then we estimate the empty mass fraction designated by  $FM_{vide}$  from [2] by using [1] for the coefficients' value. In the end of this step, we obtained the total takeoff weight  $W_{TO}$  by solving equation (1) with Newton Raphson algorithm.

$$W_{TO} = \frac{W_{PL}}{1 - (FM_{ca} + FM_{vide})} \tag{1}$$

Where  $W_{PL}$  is the payload weight.

In the fifth step, we calculate the needed power (P) using the results of both step one and step four.

In the final step, the goal is to define the initial geometry of the uav. As a start, we calculated the following parameters [5]: wing area (S), span (b), chord at the root level ( $C_0$ ), chord at the wing tip ( $C_e$ ), mean aerodynamic chord (CAM) and its position noted PCAM. After defining the wing's parameter requires, we calculate the fuselage length of the uav [2]. Then, we determine the parameters related to the horizontal and vertical tail [1,5] (similar parameter as for the uav's wings).

### 3. Study of the effect of endurance and takeoff distance on pre-sizing of an uav in the case of an uav with one engine and one with two engines

After presenting the steps of the pre-sizing method used in our study. We carry out a study of the effect of endurance and takeoff distance on the uav's initial geometry for the chosen mission called "simple cruise". We use the following conditions: payload 8.5kg, maximum cruise speed 22.2m/s, range 20km, stall speed 7m/s, rate of climb 3m/s, takeoff distance and landing distances 10m, endurance 4h and ceiling 200m. We applied this method in the case of an uav with one engine and one with two engines. To study the effect of endurance we vary the latter, from 15min to 4h with a step of 15 min, and we fix the other parameters. Similarly, we vary the takeoff distance and fix the other parameters, to study its effect on the initial geometry of the uav. We quantify for each study the variation of takeoff weight and the parameters of the uav's initial geometry.

#### 3.1 Effect of endurance

For each value of endurance, we follow each step and we solved the non-linear equation with Newton Raphson algorithm using a script in Matlab. Fig.3.1.1 summarizes the effect of endurance on the takeoff weight in the case of the uav with one engine and one with two engines.

We notice that the curves are linear and the slope of the uav with one engine is bigger than the one with two engines. We deduce that in this case it is more favorable to use two engines than one if we consider only the takeoff weight.

Fig.3.1.2 presents the variation of the different linear dimensions of the initial geometry of the uavs (with one

engine and with two engines) when the endurance varies between 30min and 4h.

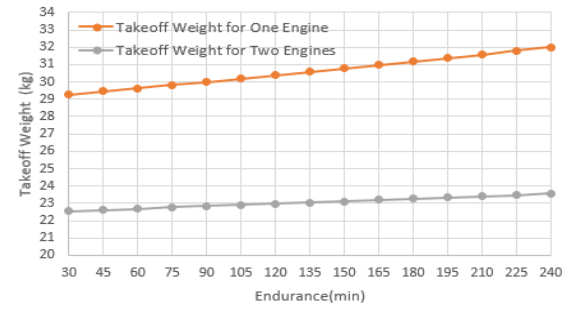


Fig 3.1.1: The takeoff weight variation with endurance of the uav with one engine and one with two engines

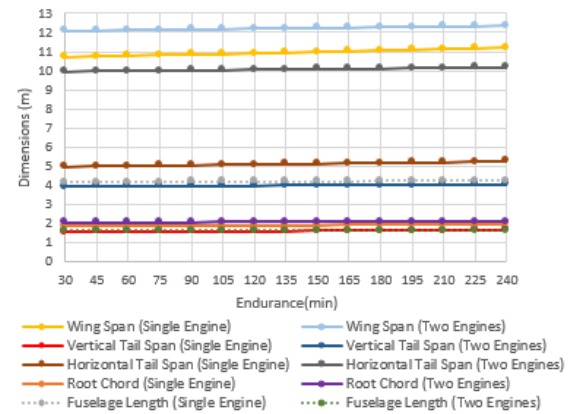


Fig.3.1.2: Effect of endurance on the uav's linear dimensions We observe for one engine an increase in wingspan, the root chord, fuselage's length, vertical tail span, and horizontal tail span with a percentage of respectively 4.5%, 4.6%, 2.1%, 5.8% and 5.8% when the endurance varies between 30min and 4h. Moreover, for the uav with two engines a smaller increase with a percentage of respectively 2.2%, 1.9%, 1.9%, 2.3% and 2.4%.

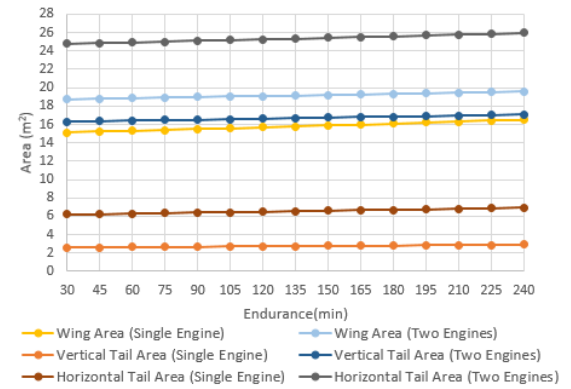


Fig.3.1.3: Effect of endurance on area of Wing, Horizontal tail and Vertical tail

From Fig.3.1.3 synthesizes the variation of different surfaces' area of the uav's initial geometry surfaces. We observe an increase, in the case of a single engine, when the endurance varies between 30min and 4h, of the wing area, the area of the horizontal and vertical tail with a percentage of respectively 9.3%, 11.9% and 11.9%. Moreover, in the case of an uav with two engines, we notice a smaller increase of these areas, respectively, by a

percentage of 4.4%, 4.8% and 4.8%. As for the takeoff weight the parameters of uav’s initial geometry with two engines is less sensitive to the increase of endurance than the uav with one engine.

**3.2. Effect of takeoff distance**

The effect of takeoff distance on the uav’s initial geometry cannot be seen from the used formulas only when the minimum wing loading, in the third step, is the takeoff wing loading (formula (4)). Using pre-sizing formulas [1], we find that this condition is satisfied only when takeoff distance  $d_{to}$  (formula (5)) is less than 12.9 m in the case of an uav with one engine and less than 3.1 m in the case of an uav with two engines. Over these limits, the takeoff distance has no effect on the parameters of the uav’s initial geometry. Therefore, we vary the takeoff distance from 5 to 12.9 m only for the uav’s with one engine.

$$\left(\frac{W}{S}\right)_{dto} = TOP \times \sigma \times C_{LTO} \times \left(\frac{P}{W_{TO}}\right) \tag{4}$$

$$d_{TO} = 8.134 \times TOP + 0.01494 \times TOP^2 \tag{5}$$

Where TOP is a characteristic parameter of takeoff and  $\sigma$  is the ration of air density at the takeoff altitude by the density at sea level.

Fig.3.2.1 shows the takeoff weight and the linear dimensions variation of the uav’s initial geometry.

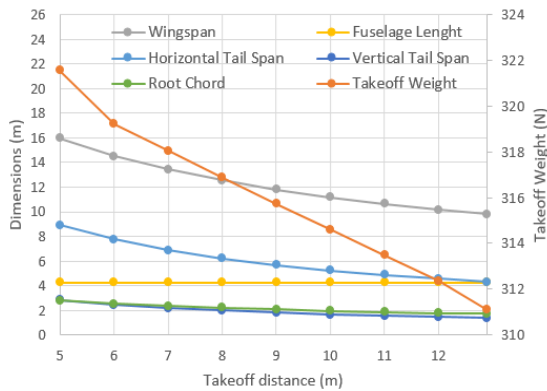


Fig.3.2.1: Effect of takeoff distance on the geometry of a single engine uav.

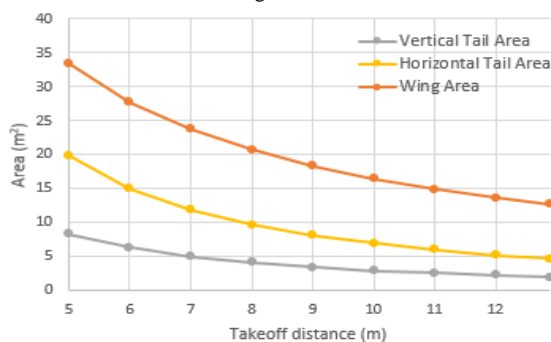


Fig.3.2.2: Effect of takeoff distance on the surfaces’ area of a single engine uav.

We observe a decrease, when the takeoff distance increase from 5 and 12.9 m, of takeoff weight, wingspan, root chord, vertical and horizontal tails by a percentage of respectively 3.3%, 38.6%, 38.6%, 51.7% and 51.7%. The fuselage’s length stays constant (variation of 0.6%).

Fig.3.2.2 synthesizes the variation of different surfaces’ area of the uav’s initial geometry surfaces. We observe a decrease, when the takeoff distance increases from 5 to 12.9m, of the area of the wings, the area of the horizontal and vertical tail with a percentage of respectively 62.3%, 76.7% and 51.7%. It can be deduced from these results that the increase in takeoff distance to the limit identified earlier (1.9m) leads to a decrease in the uav initial geometry parameters.

**4. Conclusion and perspectives**

This study quantifies the effect of endurance and takeoff distance in details to help the designer in making a good compromise between requirements (longer flight time and smaller takeoff distance) and the initial geometry found by the pre-sizing method. We gave a summary presentation of the important steps and relevant formulas to the two parameters in this method.

We studied the effect of endurance, in two cases, for an uav with one engine and one with two engines. We observe the variation of nine parameters: takeoff weight, five linear dimensions (wingspan, wing’s root chord, fuselage’s length, vertical tail span and horizontal tail span) and three surface’s area (wing area, area of the horizontal and vertical tail). When we vary its value from 15min to 4h and keeping the other requirement fixed, we observe an increase of every parameter in the case of the uav with one engine and in the one with two engines. However, the increase in the latter is smaller than the former. Which suggest that, for these specifications, using two engines is a better choice.

To study the effect of takeoff distance, we identified a limit (12.9m for an uav with one engine) above which it has no effect on the uav’s initial geometry. Under this limit, increasing the takeoff distance decreases slightly each of the nine parameters. We concluded that it is better, in our case, to have the bigger value possible of the takeoff distance when designing an uav.

These quantifications give a better insight into how to meet the needs of the end user and how to control the uav’s initial geometry in the early stage of design. This study should be extended to the other parameters of the uav’s requirement.

**References**

- [1] D. Raymer, *Aircraft Design a Conceptual Approach*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, California, 2018.
- [2] J. Gundlach, *Designing unmanned aircraft systems: a comprehensive approach*, AIAA Reston, 2012.
- [3] J. Roskam, *Preliminary Sizing of Airplanes*, Design, AIAA Education, New York, 2003.
- [4] L.K. Loftin, *Subsonic Aircraft: Evolution and the Matching of Size to Performance*, NASA, Reference Publication 1060, 1980.
- [5] M.H. Sadraey, *Aircraft Design A Systems Engineering Approach*, John Wiley & Sons, 2013.
- [6] P.M. Basset, A. Tremolet, T. Lefebvre (2015) *Rotary Wing uav pre-sizing: Past and Present Methodological Approaches at Onera*, Aerial Robotics (2015).

## L'endommagement par fissuration d'un outil de coupe revêtu en diamant lors des procédés d'usinage

K. BOUNIF<sup>1,2</sup>, M. NOUARI<sup>1</sup>, M. ABBADI<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LEM3, UMR-CNRS 7239, Université de Lorraine, GIP-InSIC, 27 rue d'Heilleule, F88100 St-Dié-des-Vosges, France

<sup>2</sup> ENSA, Laboratoire des sciences de l'ingénieur, Équipe Lean Manufacturing et Modélisation Mécanique, Université Mohamed 1<sup>er</sup>, BP 696, Oujda, Maroc

### Résumé

Dans le présent travail, un code de calcul par éléments finis « ABAQUS/STANDARD » a été mis en place pour étudier et analyser le phénomène de fissuration d'un outil de coupe revêtu en diamant soit dans le stade d'amorçage ou dans le stade de la propagation. En ce sens, nous avons proposé de combiner deux méthodes souvent utilisées pour étudier la discontinuité au niveau de l'interface outil-copeau et revêtement-substrat. Il s'agit respectivement de la méthode des éléments finis étendus (XFEM) et de la méthode des éléments cohésifs (CZM). De plus, une étude paramétrique sur l'impact de l'épaisseur de revêtement sur la fissuration a été réalisée afin d'optimiser ce paramètre, ainsi que l'étude du délaminage par fissuration.

**Mots clefs :** Usinage ; Fissuration ; Délaminage ; FEM Abaqus/Standard ; méthode XFEM ; méthode des éléments cohésifs .

### 1. Introduction

Il est bien établi que parmi les éléments essentiels qui affectent la performance et la durée de vie des outils de coupe lors des opérations d'usinage sont sûrement les revêtements. En effet, la composition et la qualité d'adhérence de ces derniers demeurent deux facteurs prépondérants qui contribuent à l'amélioration de la productivité des différentes opérations. Plusieurs nuances de revêtements existent et leur utilisation dépend du type d'usinage, des conditions de coupe ainsi que le matériau de la pièce à usiner.

Grâce à ses bonnes propriétés mécaniques telles que sa bonne dureté, son extrême rigidité, sa très haute conductivité thermique, son faible coefficient de frottement et sa bonne stabilité chimique [1], le diamant est largement utilisé dans les applications de mise en forme faisant intervenir les outils de coupe [2]. Ces derniers utilisent des plaquettes constituées de deux composantes : le substrat et le revêtement. Le substrat supporte les efforts mécaniques et les contraintes thermiques de l'usinage [3]. Le revêtement, quant à lui, protège le substrat contre l'usure [4], donne une protection thermique et chimique et assure la résistance à la fissuration [5]. Cependant, l'outil revêtu n'est pas à l'abri de l'usure et de l'endommagement rencontré lors d'une opération d'usinage. En effet, le délaminage s'est avéré le principal mode de rupture des outils de coupe

revêtus en diamant lors des opérations d'usinage [6] [7]. Comme les performances de coupe sont étroitement liées au délaminage, il est devenu primordial de contrôler la rupture de l'outil. En ce sens, cette étude vient compléter la base de données existante et mettre l'accent sur l'endommagement par fissuration des outils en carbure de tungstène lors de procédés d'usinage. Certes, le délaminage peut être la phase finale de la propagation de fissures qui peuvent être amorcées n'importe où dans le revêtement ou à l'interface ; cependant, peu d'études ont été consacrées au mécanisme de fissuration dans les outils de coupe. Pour mieux cerner les phénomènes de fissuration dans les revêtements des outils de coupe, une étude paramétrique a été réalisée dans le cadre de ce travail.

### 2. Mise en place du modèle numérique

Un modèle en éléments finis 2D, représenté sur la figure 3 a été réalisé dans le code de calcul Abaqus.

Dans notre étude, nous voulons résoudre deux problèmes essentiels résidant dans la modélisation de l'interface revêtement/substrat d'une part et dans la simulation d'amorçage et de propagation d'une fissure dans la surface du revêtement d'autre part.

Pour les conditions aux limites, nous avons appliqué un chargement mécanique sous forme d'un déplacement appliqué à la pièce usinée. Cette dernière est considérée comme rigide discrétisée (la figure 1). L'outil de coupe est divisé en deux parties principales : la première représente le revêtement et la deuxième représente le substrat. De plus, les conditions de coupe géométriques pour l'outil de coupe sont données comme suit : un rayon de bec de 6  $\mu\text{m}$ , un angle de coupe de 0° et un angle de dépouille de 7°. Dans cette étude, nous avons considéré une épaisseur du revêtement de 10  $\mu\text{m}$  comme le rayon de bec ainsi qu'une avance de coupe de 0.2 mm pour la pièce usinée.

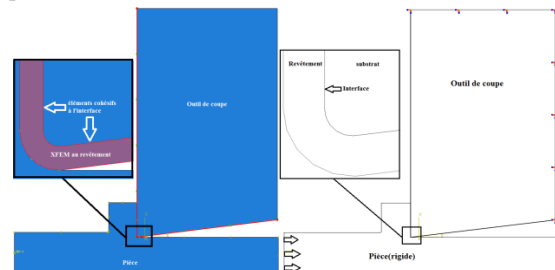


Figure 1 : Modèle élément finis

Le tableau 1 est présenté les propriétés des revêtements de diamants, les valeurs typiques ont été assignées [1].

Matériau	Module de Young [GPa]	Coefficient de poisson	Contraint principal maximal [GPa]	Energie de rupture [J / m*2]
Diamant	1200	0.07	5.7	98

Tableau 1 : Propriété mécaniques du revêtement

Le substrat est modélisé par un matériau élasto-plastique avec un écrouissage isotrope selon la loi de Ramberg-Osgood. Les propriétés mécaniques sont données dans le tableau 2 [2]. Les paramètres de la méthode des éléments cohésifs pour l'interface revêtement-substrat (diamant-carbure de tungstène) sont regroupés dans le tableau 3.

Matériau	Module de Young [GPa]	Coefficient de poisson	Résistance à l'élasticité [GPa]	Coefficient d'écrouissage
Carbure de tungstène	619,5	0.24	3,605	0.244

Tableau 2 : Propriétés mécaniques du substrat

Résistance normale maximale [MPa]	Résistance maximale au cisaillement [MPa]	Densité d'énergie de rupture J/m*2
543	314	384

Tableau 3 : Propriétés des éléments cohésifs

### 3. Maillage adapté

Pour une bonne précision des résultats, un maillage optimal est nécessaire avant de procéder au calcul numérique. Le critère de maillage est basé sur une combinaison entre précision et efficacité. Les éléments utilisés dans le maillage sont de type CPS4R. Ce type d'élément est défini comme suivant : 4-node bilinear plane stress quadrilateral, reduced integration, hourglass control figure 2.

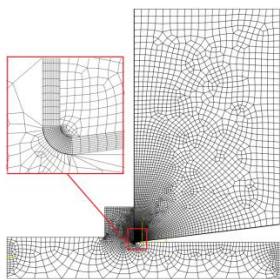


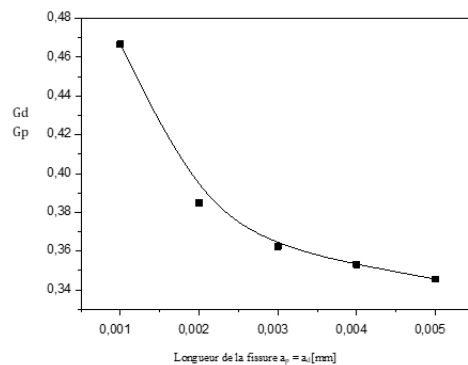
Figure 2 : Maillage utilisé

### 4. Etude de délaminage

Durant l'opération d'usinage, des fissures peuvent éventuellement s'amorcer dans le revêtement de l'outil de coupe. Sous l'effet de la pièce à usiner, qui engendre des contraintes sur la surface de l'outil de coupe, une fissure peut se propager jusqu'à l'interface. Son comportement dépend de la rigidité des matériaux du revêtement et du substrat. En effet, lorsqu'elle arrive à

l'interface, elle peut soit pénétrer le matériau de base (substrat), soit dévier à l'interface. Cette déviation est plus connue sous le nom de délaminage qui est considéré comme le principal mécanisme d'usure des outils de coupe. Il entraîne souvent des défaillances catastrophiques de l'outil qui contribuent à une mauvaise qualité de la pièce à usiner et une interruption des opérations d'usinage.

Nous avons donné à chaque fois une longueur aux deux fissures à condition que ces dernières aient la même longueur  $a_d = a_p$  avec  $a_d$  et  $a_p$  représentant respectivement les longueurs de déviation et de pénétration de la fissure à l'interface revêtement/substrat. Ensuite, nous avons calculé le rapport  $G_d/G_p$  pour ces différentes valeurs de longueur de fissure. La figure 5 représente l'évolution du rapport  $G_d/G_p$  en fonction de la longueur de la fissure. Nous avons observé que le rapport  $G_d/G_p$  diminue lorsque la longueur de la fissure croît. Il reste inférieur à 1 quel que soit la longueur de la fissure et par conséquent la probabilité de déviation d'une fissure à l'interface est plus grande que celle de pénétration. En effet, la fissure a besoin de moins d'énergie pour dévier à l'interface que de pénétrer le matériau de base comme illustre la figure suivante :

Figure 3 : Evolution du rapport  $G_d/G_p$  en fonction de la longueur de la fissure.

Pour valider les résultats prédits par le modèle numérique, des essais expérimentaux ont été réalisés au sein du Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée (LEMTA) par l'Equipe de Recherche en Mécanique et Plasturgie (ERMeP) de l'Institut Supérieur d'Ingénierie et de la Conception 'InSIC', de Saint Dié des Vosges en France. Ces essais ont été effectués sur un outil de coupe de tungstène revêtu de diamant pendant une opération d'usinage à une vitesse de coupe de 100 mm/min. Un bon accord entre les observations expérimentales et les prévisions du modèle numérique a été constaté. En effet, une fissure amorcée et propagée dans le revêtement de l'outil jusqu'à l'interface revêtement/substrat a subi une déviation le long de l'interface comme l'indique la figure 4.

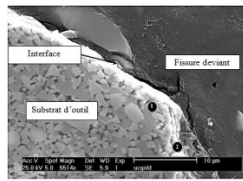


Figure 4 : Fissure déviée à l'interface revêtement/substrat d'un outil de coupe avec les conditions de coupe :  $V = 100$  m / min,  $f = 0,15$  mm / tour,  $a_p = 2$  mm,  $a_e = 8,8$  mm.

Lorsque cette fissure atteint une certaine longueur, elle conduit au décollage du revêtement et du substrat : c'est ce qu'on appelle le délaminage du revêtement. La figure 5 montre clairement ce phénomène dans le cas d'un essai réalisé dans les mêmes conditions que le cas précédent.

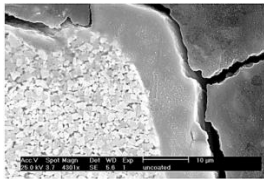


Figure 5 : Délaminage à l'interface revêtement/substrat d'un outil de coupe (100 m / min, 0,15 mm / tour. 2 mm, 8,8 mm).

##### 5. Effet de l'épaisseur du revêtement sur l'amorçage et la propagation de la fissure

Les résultats obtenus pour les deux cas d'étude correspondant aux phases d'amorçage et de propagation (figures 6,7) indiquent qu'un revêtement plus épais réduit la probabilité d'amorcer les fissures dans les outils de coupe. De la même manière, la propagation des fissures dans les outils caractérisés par une forte épaisseur est très lente par rapport à celle des revêtements minces dont la conséquence directe se traduit par le retardement du délaminage du revêtement.

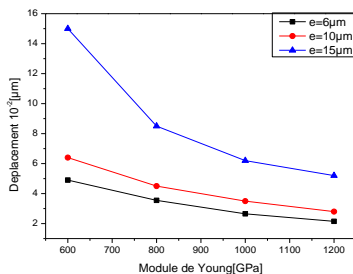


Figure 6 : La variation du déplacement critique nécessaire à l'amorçage en fonction du module de Young pour différentes épaisseurs du revêtement

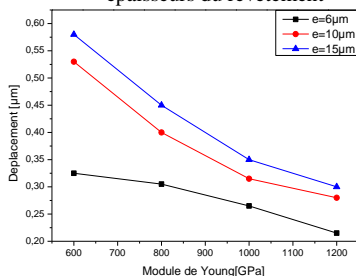


Figure 7 : La variation du déplacement critique nécessaire à la propagation avec le module de Young pour différentes épaisseurs du revêtement.

## Conclusion

Pour étudier l'amorçage et la propagation d'une fissure dans le revêtement, un modèle élément finis 2D a été mis

en place sous le code EF Abaqus/Standard. Les résultats numériques obtenus peuvent être récapitulés dans les points suivants :

- Le délaminage est le stade final de la propagation du réseau de fissures.
- Un revêtement plus épais réduit la probabilité d'amorcer et propager les fissures dans les outils de coupe.
- Une faible rigidité du revêtement réduit aussi la probabilité d'amorcer et propager les fissures dans les outils de coupe.

## Références

- [1] K. Bounif, M. Abbadi, M. Nouari, R. Selvam, A numerical approach for crack-induced damage in tungsten carbide cutting tools during machining. *Engineering Failure Analysis*, Volume 128, 2021, 105617, ISSN 1350-6307,
- [2] K. Bounif, M. Abbadi, S. Atlati, M. Nouari, R. Selvam, Modeling and Numerical Simulation of the Cracking of a Diamond-Coated Cutting Tool During Machining, *Key Engineering Materials* 820, (2019) 29-39.
- [3] Pagès, C. (2003). Comportement de revêtements céramiques sur outil en tournage à sec de finition. Mécanique. France, Ecole Centrale de Lyon.
- [4] Klocke F, Krieg T (1999) Coated Tools for Metal Cutting—Features and Applications. *CIRP Annals – Manufacturing Technology* 48(2) : 515–525.
- [5] Brigitte Vasques Thèse « Etude du comportement du rayon d'arrêt et de son influence sur l'intégrité de surface en tournage à sec. Université François-Rabelais de tours 2008.
- [6] Chou, Y.K. and J. Liu (2005). "CVD Diamond Tool Performance in Composite Machining," *Surface and Coatings Technology*, Vol. 200, pp. 1872-1878.
- [7] Amirhaghi, S., Reehal, H.S., Wood, R.J.K. and Wheeler, D.W. (2001) 'Diamond coatings on tungsten carbide and their erosive wear properties', *Surface and Coatings Technology*, Vol. 135, Nos. 2–3, pp.126–138.

**Thème 05 :**  
**Rupture et fatigue des matériaux**

## Experimental study of the stress intensity factor of high density polyethylene (HDPE)

R. ELKORI<sup>1</sup>, A. LAMARTI<sup>2</sup>, K. EL HAD<sup>2</sup>, A. HACHIM<sup>2</sup>

1. Hassan II University of Casablanca, higher national school of electricity and mechanics, Laboratory of control and Mechanical characterization of Materials and structures, Casablanca MOROCCO, (rabiaaelkori@gmail.com)  
2.3.4 Higher Institute of Maritimes Studied, Casablanca MOROCCO, (Hachim.abdelilah@gmail.com)

### Abstract

The use of high density polyethylene is increasing remarkably in several fields (packaging, piping industry, shipbuilding) in the last decades because of its low cost, its ability to be recycled several times, its strength and rigidity. In this work we will make an experimental study consists in calculating the stress intensity factor for HDPE specimens with U and V notches. The experimental treatment of this study based on the fixing the notch depth "a" and change of the opening length "w" i.e. the study of stress intensity factor KI as a function of the opening length. The results obtained show that KI increases with increasing opening length, and KI for the defect U is large in front of V due to high stress concentration at the level of notch v.

**Keywords:** *U notch; V notch; stress intensity factor (KI); HDPE.*

### 1. Introduction

Defects with geometry are the most common received attention in the scientific and also industrial field because of the geometric complexity of these defects (Maccha, 2015). The U and V notch problem is studied to show the transition from ductile to brittle behavior with different ways (Elkori, 2021). The study of the stress intensity factor "SIF" allows to define the asymptotic behavior at the crack front singularity (Prassianakis, 1979), the stress intensity factor is a loading parameter of a notched specimen structure depending on the notch geometry, specimen structure or loading. The use of SIF for the case of polymers is a complex one because of the non-linearity of polymers. In our article we will calculate the stress intensity factor of the semi-crystalline polymer high density polyethylene, we have chosen this type of polymer because of its wide use in industrial applications like shipbuilding, packaging (elkori, 2020), We will calculate the SIF for HDPE with different lengths of openings of the notch V and U, the results obtained are represented in the following.

### 2. Results and Discussion

### 2.1 Experimental and analytical models

From a practical point of view, the damages of HDPE structures are determined by the growth of the crack in a slow way (Hutar, 2012). Fracture mechanics studies the occurrence or propagation of cracks in materials, so it can be used to describe the stress field around a notch or crack front. The plastic deformations of HDPE are localized in the notch front. Then the SIF can be expressed by:

$$K_I = F(\beta) \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi a} \quad (1)$$

$$F(\beta) = \sqrt{\text{Sec}\left(\frac{\pi\beta}{2}\right)} \cdot (1 - 0.025\beta^2 + 0.06\beta^4) \quad (2)$$

- a, is the length of the notch opening of the test piece.
- W is the length of the test piece.
- B is the ratio between a and W.
- Sec is the secant.

To study the behavior of HDPE at different conditions. The HDPE plates are obtained by extrusion, which consists in transforming the raw material of HDPE that is in the form of granules into a bubble that will become, once cooled, a sheath that will serve as a base for the manufacture of the sheets. In order to calculate SIF, it is necessary to carry out notched specimens, we prepared two types of defects V and U with flat bottom, we fixed the depth and we changed the length of opening of 5, 10, 15, and 20mm The tests are carried out at room temperature in a MTS tensile testing machine with a speed of 1mm/s and a load capacity of 5KN.

- The condition of the characterization specimens before and after failure is shown in Figure 1.
- The fracture pattern of the U- and V-notched specimens during the tensile tests is shown in Figure 2 and Figure 3.

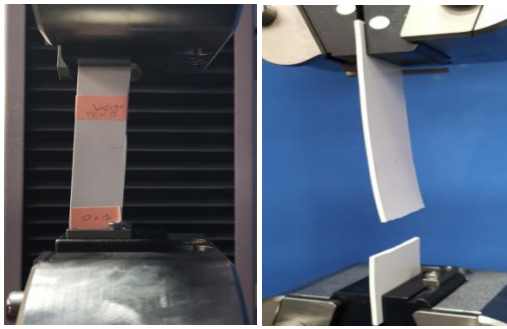


Fig. 1. Specimens for characterization of HDPE before and after the breakup.

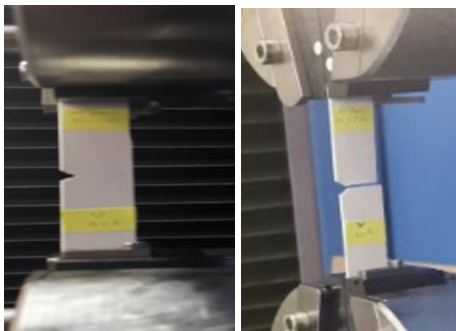


Fig.2. The V-notched specimen before and after breaking.

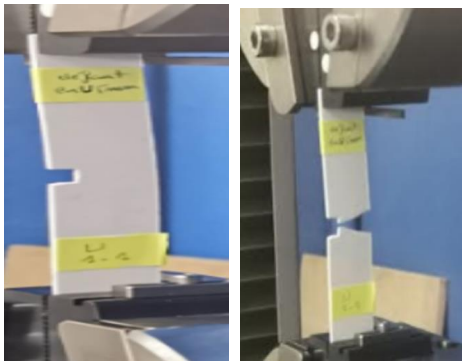


Fig. 3. The U-notched specimen before and after breaking.

## 2.2 Results

The results obtained from the experimental tests are shown in figures 4 and 5, the comparison between the two stress intensity factors of the two defects are shown in figure 6.

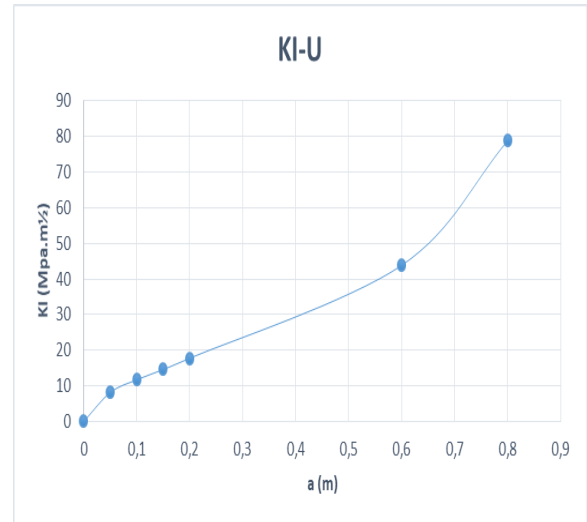


Fig.4. SIF curve for HDPE under U-notch.

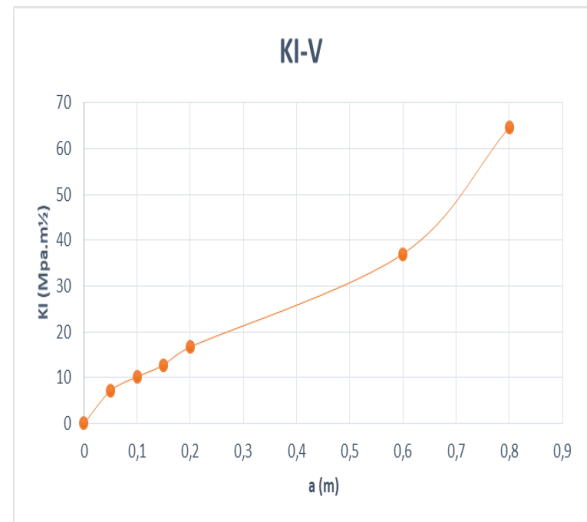


Fig. 5. SIF curve for HDPE Under V-notch.

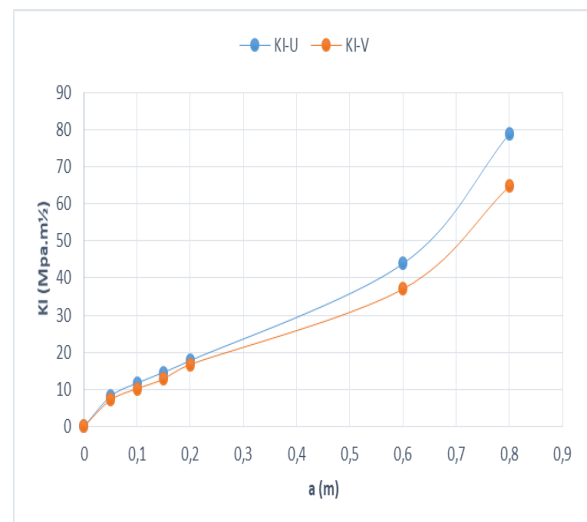


Fig. 6. Comparison of SIF result.



### 3. Conclusion

- The determination of the FIS can be done by using static tensile tests.
- The SIF changes with the change of the type of defect and opening length.
- The presence of V and U defects causes an increase in brittle fracture although the material in the virgin state is ductile, That is, a ductile-to-brittle transition, which describes the harmfulness of the U and V defects, which have reduced the mechanical properties of HDPE such as tensile strength and toughness.
- With the increase of the opening angle (opening length) for the V defect, the SIF increases.

### Références

- [1] elkori, R. (2020). Numerical and experimental study of the Behaviour of notched HDPE. The 3rd International Conference of Computer Science and Renewable Energies (ICCSRE'2020), p. 1.
- [2] Elkori, R. (2021, fevrier). Numerical Simulation of HDPE Behavior under V-Notch. Innovations in Smart Cities Applications Volume 4, pp. 1051-1058.
- [3] Hutar, P. (2012). Constraint effect on the slow crack growth in polyethylene. International Journal of Structural Integrity, 3.
- [4] Maccha, C. (2015). Determination of Stress Intensity Factor on Circumferential Notched Round bar. International Journal of Engineering Research and General Scienc, 3.
- [5] Prassianakis, J. N. (1979). Stress intensity factors at V-notched elastic, symmetrically loaded, plates by the method of. IOP SCIENCE, 4.

**EFFET DE L'ANGLE DE RASTER SUR LA RESISTANCE A LA  
PROPAGATION DE LA FISSURE DANS LES EPROUVETTES SENT  
IMPRIMEES EN ABS PAR FDM  
EFFECT OF RASTER ANGLE ON RESISTANCE TO CRACK  
PROPAGATION IN ABS PRINTED FDM SPECIMENS**

**O. AOURIK<sup>1</sup>, A. CHOUAF<sup>1</sup>, M. OTHMANI<sup>1</sup>, B. SAADOUKI<sup>1</sup>**

1. Laboratoire de Mécanique d'Ingénierie et d'Innovation, ENSEM-Université Hassan II Casablanca  
a.chouaf@ensem.ac.ma  
oumaima.aourik@ensem.ac.ma

### Abstract

Additive manufacturing techniques continue to develop and cover all industrial fields. However, the performance of the appearance and mechanical behaviour of the parts obtained by this process remain to be mastered and are still the subject of current research work. Among these performances, the one corresponding to the resistance to crack propagation. The objective of this article is to analyse and understand the effect of the raster angle on crack propagation in an ABS (Acrylonitrile-Butadiene-Styrene) sample obtained by FDM (Fused Deposition Modeling). Two approaches were developed: to determine the critical stress intensity factor  $K_{IC}$  and to numerically predict possible crack propagation paths.

### Résumé

Les techniques de la fabrication additive ne cessent de se développer et couvrir tous les domaines industriels. Toutefois, les performances d'aspect et du comportement mécanique des pièces obtenues par ce procédé restent à maîtriser et qui font toujours l'objet des travaux actuels de recherche. Parmi ces performances, celle qui correspond à la résistance à la propagation des fissures. L'objectif de cet article est d'analyser et de comprendre l'effet de l'angle de raster sur la propagation des fissures dans un échantillon en ABS (Acrylonitrile-Butadiène-Styrène) obtenu par FDM (Fused Deposition Modeling). Deux approches ont été développées : pour déterminer d'une part le facteur d'intensité de contrainte critique  $K_{IC}$ ; d'autre part pour prédire numériquement les trajectoires possibles de propagation des fissures.

**Keywords :** *FDM, Raster Angle, ABS, Crack, Numerical Simulation.*

**Mots clefs :** *FDM, Angle de Raster, ABS, Fissure, Simulation Numérique*

### 1. Introduction

Malgré les progrès que connaissent les méthodes de fabrication additive, les qualités d'aspect et de performance mécanique des pièces obtenues restent à améliorer [1].

De nombreuses études ont été développées pour apporter certaines améliorations. Nous avons examiné l'effet des paramètres d'impression sur la performance mécanique des pièces en ABS [2], et à travers toutes ces études, nous avons remarqué que les aspects résistance à la rupture et chemin des fissures ne sont pas suffisamment étudiés, surtout lorsqu'il s'agit des simulations numériques dans ce type de structure.

Dans la présente étude, nous avons adopté deux approches, l'une est expérimentale basée sur les essais de traction des éprouvettes SENT obtenues par FDM, et l'autre approche est numérique mettant en évidence les concentrations des contraintes de Von Mises pour essayer de comprendre les éventuels chemins de la propagation de la fissure en fonction des angles de raster dans les éprouvettes SENT en ABS.

### 2. Approche expérimentale

#### 2.1 Fabrication des éprouvettes et essais

Nous avons réalisé des éprouvettes SENT (Single Edge Notch Tension) en vue d'étudier l'effet de différents angles de raster sur la résistance à la propagation de la fissure dans des échantillons en ABS imprimés par la méthode FDM.

Pour ce faire, nous avons modélisé ces éprouvettes sur un logiciel CAO selon les normes ISO 13586 et ASTM D5045 [3-4], puis nous avons converti le modèle en un fichier Stéréolithographie (STL). Ce dernier a également été traduit en fichier d'instructions machine écrit en langage G-code décrivant les trajectoires de la buse qui dépose le matériau de remplissage. Une fois le fichier obtenu, les échantillons seront prêts à être imprimés à l'aide de l'imprimante 3D RAISE 3D. Les paramètres utilisés pour imprimer les spécimens SENT sont énumérés au Tableau 1. Le filament utilisé est en ABS avec un module d'Young égal à 2.0 GPa, un coefficient de Poisson égal à 0.3 et une limite élastique égal à 35.5 MPa [5].

Tableau.1. Paramètres d'impression utilisés

Parameters	Values	Units
Layer thickness	0.2	mm
First layer printing speed	30	mm/s
Print speed of other layers	150	mm/s
Build orientation	XYZ	
Infill percentage	100	%
Number of perimeters	2	
Temperature	230	°C

Nous rappelons que cette méthode d'impression FDM est un processus de construction de couches successives qui nous permet de contrôler l'angle de raster pour chaque couche séparément, et de produire des échantillons avec des angles de raster différents d'une couche à l'autre.

Nous avons donc choisi de travailler avec deux différents types d'éprouvettes. Le premier type adopte des couches alignées (filaments parallèles entre couches). Tandis que le second type adopte des couches croisées (filaments croisés entre couche). Pour ce dernier cas de figure deux couches successives sont imprimées avec deux angles différents. Pour réaliser les éprouvettes, nous avons donc considéré deux configurations : Pour la Configuration (1) les couches sont alignées avec des angles de raster de 15°, 30°, 45°, 60° et 75° et pour la configuration (2) les couches sont croisées avec des angles de raster alternées [15°/75°], [30°/60°] et [45°/45°] voir Fig.1.

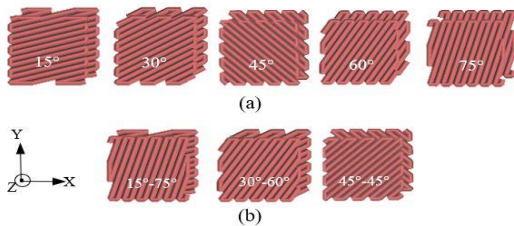


Fig.1. Angles de raster choisis pour réaliser les éprouvettes : (a) Configuration (1), (b) Configuration (2)

Pour réaliser nos essais de traction, nous avons utilisé une machine de type MTS avec une charge de 100 kN. La vitesse de charge est de 0.2 mm/min. Les résultats sous forme Force-Déplacement obtenus ont été enregistrés par le logiciel MTS.

## 2.2 Résultats expérimentaux

A partir des courbes Contraintes-Déformation obtenues, nous avons déterminé les valeurs du facteur d'intensité de contrainte critique  $K_{IC}$ . Pour ce faire, nous nous sommes basés sur la formulation suivante [6] :

$$K_{IC} = \sigma_c \cdot \sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{w}\right) \quad (1)$$

Où  $\sigma_c$  est la contrainte critique,  $a$  est la longueur de l'entaille,  $w$  est la largeur de l'éprouvette, et  $f\left(\frac{a}{w}\right)$  est une fonction géométrique donnée par :

$$f\left(\frac{a}{w}\right) = 1.12 - 0.23 \left(\frac{a}{w}\right) + 10.56 \left(\frac{a}{w}\right)^2 - 21.74 \left(\frac{a}{w}\right)^3 + 30.42 \left(\frac{a}{w}\right)^4 \quad (2)$$

Les valeurs de  $K_{IC}$  que nous avons obtenues pour les deux configurations étudiées sont regroupées dans le Tableau. 2.

Tableau.2. Facteur d'Intensité des Contraintes critique  $K_{IC}$ 

Configuration (1) : filaments parallèles entre couches					
Angle de raster	15°	30°	45°	60°	75°
$K_{IC}(MPa\sqrt{m})$	4.39	2.72	2.16	1.74	0.66
Configuration (2) : filaments croisés entre couches					
Angle de raster	15°/75°	30°/60°	45°/45°		
$K_{IC}(MPa\sqrt{m})$	3.31	3.13	3.41		

Pour la première configuration (filaments parallèles entre couches), plus l'angle de raster est inférieur à 30°, la résistance à la rupture d'une pièce en ABS imprimée par FDM est presque similaire à celle de l'ABS continue [7]. En revanche lorsque l'angle augmente, la résistance à la propagation de la fissure devient plus faible. Pour la deuxième configuration (filaments croisés entre couches), le  $K_{IC}$  est de même ordre de grandeur pour les trois cas étudiés [15°/75°], [30°/60°] et [45°/45°]. Toutefois, le cas [45°/45°] présente une valeur de  $K_{IC}$  légèrement supérieur aux autres cas. Ce qui concorde avec la littérature [8].

## 3. Approche numérique

Pour mieux comprendre cette notion de résistance à la propagation de la fissure dans les structures imprimées, nous avons réalisé des simulations numériques du comportement des éprouvettes SENT. C'est à partir des distributions des contraintes que nous allons essayer de prédire les éventuelles trajectoires de propagation des fissures selon les angles de raster.

### 3.1 Modèle géométrique et conditions aux limites

Selon la méthode de fabrication FDM, nous avons réalisé pour les éprouvettes SENT un modèle numérique à l'aide d'un script en langage de programmation "Python", qui permet au code de calcul "Abaqus Standard" d'exécuter les instructions écrites dans le fichier G-code pour dessiner les trajectoires, et préparer les éprouvettes virtuels pour l'essai de traction numérique pour différents angles de raster. Pour créer dans notre modélisation le contact entre les filaments successifs, nous avons utilisé une interaction de type 'Tie', avec des éléments linéaires 3D tétraédriques. Nous rappelons, que pour le matériau utilisé, nous avons considéré un module d'Young égal à 2.0 GPa, un coefficient de Poisson égal à 0.3, une densité de 1050 kg/m<sup>3</sup> et une limite élastique égal à 35.5 MPa à partir de la loi de comportement qui décrit le comportement mécanique du filament d'ABS [5]. Les conditions aux limites appliquées lors de la simulation numérique sont identiques à celles appliquées lors d'un essai de traction physique. En outre, nous avons imposé un encastrement sur une face de notre spécimen virtuel tandis que nous avons imposé sur l'autre face un déplacement forcé suivant l'axe longitudinal.

### 3.2 Distribution des contraintes

A partir de nos simulations, nous avons analysé les distributions des contraintes de Von-Mises pour tous les angles de raster et selon les deux configurations étudiées.

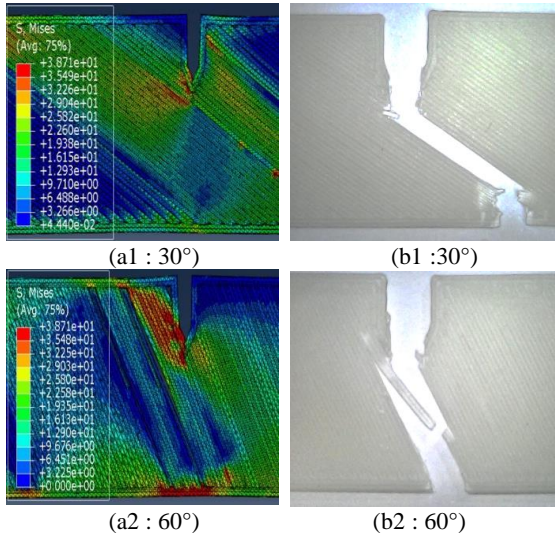


Fig. 2. (a1) Distribution des contraintes de Von Mises et (b1) Chemins d'endommagement pour les angles : (i=1) 30°, (i=2) 60°.

Selon ces analyses, nous pouvons constater pour la combinaison (1) que la distribution des contraintes met en évidence des concentrations orientées suivant les angles des rasters (Fig. 2. (a1 :30°) et (a3 :60°)).

Elles se caractérisent par de fortes contraintes de cisaillement qui ont tendance à favoriser l'endommagement interfacial entre filaments. Ce qui a été confirmé par nos observations (Fig. 2. (b1 :30°) et (b3 :60°)). Après amorçage, la fissure suit un chemin orienté suivant l'angle de raster.

Pour la configuration (2) qui comporte des couches à filaments croisés, la distribution des contraintes est irrégulière. La résistance à la propagation de la fissure est presque la même pour toutes les combinaisons d'angles, comme le montre les valeurs de  $K_{IC}$  du Tableau 2. Toutefois, la propagation de la fissure suit le chemin de l'angle le plus grand. Elle progresse facilement dans les couches qui comportent le  $K_{IC}$  le plus faible dans la structure. Cette constatation a été confirmée par nos observations (Fig. 3. (cas 30°/60°)).



Fig. 3. Propagation de la fissure selon l'angle le plus grand pour la configuration (2) (cas : 30°/60°).

### 4. Conclusion

L'étude de l'effet de l'angle de raster sur la propagation des fissures dans une structure obtenue par FDM en ABS a été développée. Deux approches ont été considérées ; une est expérimentale pour déterminer le  $K_{IC}$  et l'autre est numérique pour prédire le chemin de la fissure.

Pour les structures constituées de filaments parallèles entre couches, la résistance à la propagation de la fissure s'améliore avec les petits angles de raster. En effet, avec un angle de raster inférieur ou égale à 15°, le KIC est de l'ordre de celui d'une éprouvette continue. Pour ce type de structures, la propagation de la fissure suit le chemin qui est orienté selon l'angle de raster.

En revanche, pour les structures comportant des filaments croisés entre couches, la résistance à la propagation de la fissure n'est pratiquement pas affectée par l'angle de raster. Pour ce cas de figure, on a obtenu à peu près le même  $K_{IC}$  pour les différents angles de raster et la propagation de la fissure suit l'angle le plus grand dans la structure. La valeur de KIC est légèrement inférieure à celui de l'ABS continu.

### Références

- [1] C. Palanisamy, et al., Additive manufacturing: a review on mechanical properties of polyjet and FDM printed parts, Polymer Bulletin (2021) 1-52.
- [2] M. Othmani, Enhanced mesostructural modeling and prediction of the mechanical behavior of acrylonitrile butadiene styrene parts manufactured by fused deposition modeling, International Review of Mechanical Engineering 14.4 (2020) 243-252.
- [3] ISO 13586, Plastics - Determination of Fracture Toughness (GIC and KIC) - Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM) Approach, International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2018.
- [4] ASTM D5045, Standard Test Methods for Plane-Strain Fracture Toughness and Strain Energy Release Rate of Plastic Materials, ASTM International, West Conshohocken, PA, 1999, DOI: 10.1520/D5045-99.
- [5] M. Othmani, et al., Modeling and numerical analysis of the mechanical behavior of parts obtained by the FDM type additive manufacturing process, In: Proceedings of the Mediterranean Symposium on Smart City Application, ACM, Tangier (2017) 3.
- [6] H. Tada, The analysis of cracks handbook, New York: ASME Press 2 (2000) 1.
- [7] A. E. H. Oskui, et al, Experimental and numerical investigation of fracture of ABS polymeric material for different sample's thickness using a new loading device, Polymer Engineering & Science, 54-9 (2014) 2086-2096.
- [8] J. P. Isaac, Crack initiation and growth in additively printed ABS: effect of print architecture studied using DIC, Additive Manufacturing 36 (2020) 101536.

## Etude du comportement d'une Eprouvette (CT) en Acier P265 GH

M. LAHLOU<sup>1</sup>, A. EN-NAJI<sup>2</sup>, N. MOUHIB<sup>3</sup>, B. SAADOUKI<sup>4</sup>, F. MAJID<sup>5</sup> AND R. RHANIM<sup>6</sup>,

<sup>1</sup> : LabSIPE, (ENSAJ )University chouaib Doukkali, EL Jadida, Morocco

<sup>2</sup> Laboratoire de MMESA, FSTE, Université Moulay Ismail, Maroc

<sup>3</sup> Institut Supérieur d'Etudes Maritimes, Km 7 Route d'El Jadida , Casablanca, Maroc

<sup>4</sup> : LCCMMS , Ecole Nationale Supérieur d'Electricité et de Mécanique (ENSEM), , Casablanca, Maroc

<sup>5</sup> Laboratory of Nuclear, Atomic, Molecular, Mechanical and Energetic Physics, University Chouaib Doukkali, El jadida, Morocco.

<sup>6</sup> Laboratory Study of Advanced Materials and Application, University Moulay Ismail, Meknes, Morocco.

### 1. Introduction

Grâce au développement de l'informatique, de nombreux secteurs industriels ont vu apparaître un nouvel outil de production devenu actuellement incontournable : la modélisation numérique par la méthode des éléments finis. Cette méthode est une manière numérique de résoudre les problèmes de la mécanique et qui permet de déterminer une solution approchée sur un domaine spatial [1].

Dans les structures métalliques, les fissures s'amorcent le plus souvent au niveau de discontinuités géométriques de type entailles ou défauts. Les paramètres géométriques des structures et des discontinuités gouvernent l'amorçage ou la propagation des fissures et par conséquent la tenue en service ou la résistance de la structure [2]. Dans le domaine industriel, pour des raisons économiques ou de sécurité on cherche à connaître le degré de nocivité des défauts ainsi que la durée de vie résiduelle des structures. Ceci passe par l'établissement de modèles basés sur la mécanique de la rupture. Au niveau des défauts, la distribution des contraintes est relativement complexe et il en est de même pour les quantités relatives à la mécanique de la rupture.

On peut citer les travaux de A. HACHIM [3,4] portant sur l'étude numérique d'une éprouvette bi-entailée en Acier S355, il a étudié le comportement du matériau en présence du défaut. Y. HIROSHI [5] a étudié le facteur d'intensité de contrainte critique sur les éprouvettes simplement entaillées.

Ce travail est consacré à l'analyse par éléments finis d'une éprouvette de traction simplement entaillée (CT).

### 2. Expérimentation

Pour extraire les caractéristiques mécaniques de l'acier P265GH qui sera utilisé dans notre programme, des essais de traction ont été effectués au centre technique

des industries mécaniques Maroc (Cetim). Afin de comparer les caractéristiques dans le sens de laminage, des éprouvettes filetées (figure 1) ont été extraites dans les sens longitudinal et transversal. Les courbes d'essai donnant la contrainte en fonction de l'allongement sont données par la figure 2 :

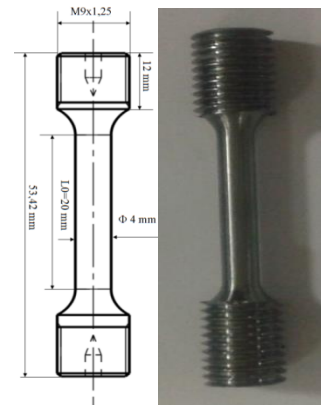


Figure 1 : Dimensions de l'éprouvette filetée

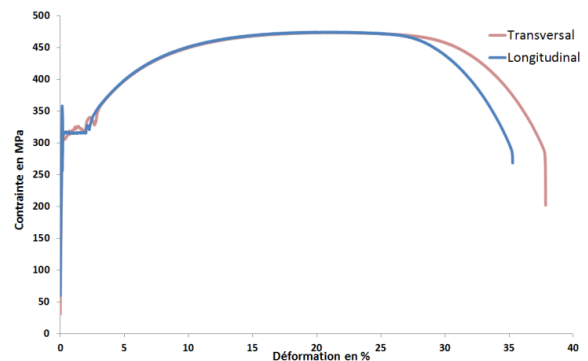


Figure 2 : Courbe de traction

Les principales caractéristiques mécaniques de l'acier P265GH, à la température ambiante, sont reportées dans le tableau 1

**Tableau 1 : principales caractéristiques mécaniques de l'acier P265GH**

Le module de Young $E$ (MPa)	La limite d'élasticité $\sigma_e$ (MPa)	La contrainte de rupture $\sigma_g$ (MPa)	Allongement %	Coefficient de poisson $\nu$
$2.10^3$	320	470	35	0,3

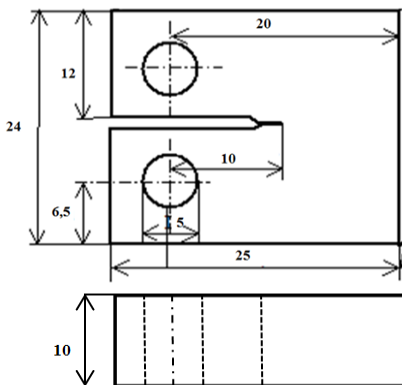
Nous remarquons que l'allongement est de l'ordre de 35 % qui est supérieur à 14 % exigé par le CODAP [6]. De ce fait, cet acier P265GH est bien adapté pour les structures sous pression.

### 3. Modélisation numérique

Le code de calcul Cast3m 2013 est utilisé pour construire un modèle éléments finis pour l'analyse de l'éprouvette (CT) soumise à une sollicitation de traction. Dans ce qui suit, on décrit le modèle éléments finis.

#### 3.1 Géométrie

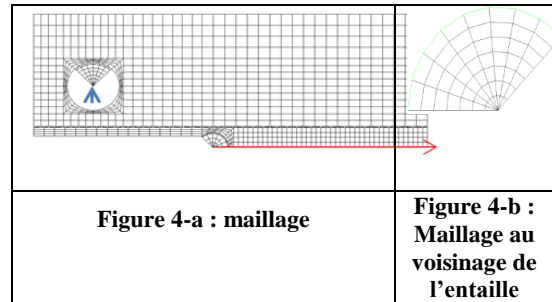
La géométrie et les dimensions de l'éprouvette à l'étude sont illustrées dans la figure 3. L'étude étant restreinte au mode I, l'éprouvette est soumise à une sollicitation de traction afin de solliciter la fissure en mode ouverture.



**Figure 3 : Dimensions de l'éprouvette à l'étude (mm)**

#### 3.2 Maillage et conditions aux limites

Compte tenu de la symétrie du problème, seule la moitié de l'éprouvette est discrétisée. Les résultats numériques étant destinés à une analyse en mécanique de la rupture, une attention particulière est accordée au maillage notamment en fond de fissure et dans son voisinage. Pour ce faire, on utilise un maillage très fin avec des éléments de Barsoum [7]. Les détails du maillage sont illustrés dans les figures 4a et 4b.



**Figure 4-a : maillage**

**Figure 4-b : Maillage au voisinage de l'entaille**

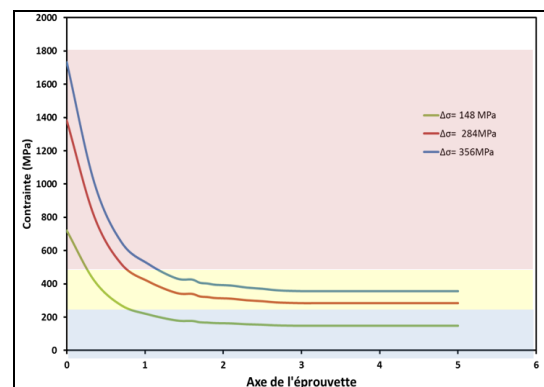
### 3.3 Chargement

Le chargement simulé est une sollicitation en traction selon l'axe longitudinal de l'éprouvette. Afin d'éviter toute flexion ou torsion parasite et de s'assurer que l'effort de traction est parfaitement dans l'axe, ce dernier est appliqué sur l'éprouvette par l'intermédiaire d'un triangle rigide indiqué par la flèche de la figure 4a. Les chargements retenus sont calibrés pour que les contraintes nominales appliquées soient respectivement de 148 MPa, 284MPa et 356MPa.

## 4. Résultats & discussions

### 4.1 Evolution de la contrainte dans le ligament

Les courbes de la figure 5 montrent l'évolution de la contrainte dans le ligament de l'éprouvette, ie suivant l'axe x de la figure 4a (origine en fond de fissure) pour les trois niveaux de contraintes appliquées :  $\sigma_a = 148$  MPa, 284MPa, 356MPa.



**Figure 5 : Evolution de la contrainte de Von-Mises dans le ligament de l'éprouvette pour les trois contraintes appliquées ( $\sigma_a = 356$ MPa, 284MPa, 148MPa).**

L'analyse des courbes de la figure 5 montre que les contraintes maximales se situent au niveau du fond d'entaille. Nous relevons que la contrainte diminue

progressivement on s'éloignant du fond d'entaille pour se stabiliser à une contrainte égale la contrainte nominale. Nous distinguons trois zones :

- La première zone (élastique en bleu) qui correspond à des contraintes comprises dans l'intervalle  $[0, 320\text{MPa}]$ .  $L$  qui est inférieur à la limite élastique. Cette zone reste élastique.
- Une deuxième zone (plastique en jaune) qui correspond à des contraintes comprises dans l'intervalle  $[320, 470\text{MPa}]$ . La contrainte étant supérieure à la limite élastique du matériau, la zone est le siège de déformations plastiques.
- Une troisième zone (rupture en marron) qui correspond à des contraintes ( $\sigma > 470\text{ Mpa}$ ) généralement au voisinage du fond d'entaille, La contrainte dépasse la contrainte ultime.

## 4.2 Evolution du facteur d'intensité de contrainte

Les courbes de la figure 6 montrent l'évolution du facteur d'intensité de contrainte numérique et analytique (suivant l'équation 1) dans le ligament de l'éprouvette, ie suivant l'axe  $x$  de la figure 4a (origine en fond de fissure) pour les trois niveaux de contraintes appliquées :  $\sigma_a = 148\text{ MPa}$ ,  $284\text{MPa}$ ,  $356\text{MPa}$ .

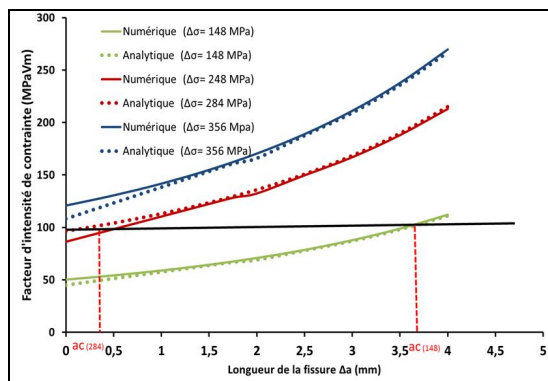


Figure 6 : Le facteur d'intensité de contrainte pour les trois contraintes appliquées ( $\Delta\sigma = 356\text{MPa}$ ,  $284\text{MPa}$ ,  $148\text{MPa}$ )

L'analyse des courbes de la figure 6 montre qu'il y a une augmentation significative du facteur d'intensité de contrainte en fonction de la longueur de la fissure et de la contrainte appliquée.

La variation du facteur d'intensité de contrainte numérique est comparable à celle du l'analytique.

## 5. Conclusion

Dans le domaine des structures à risque comme les équipements sous pression par exemple, en présence de défaut ou de fissure et pour des raisons de sécurité évidentes, il est fondamental de connaître de manière

précise le degré de nocivité du défaut. La modélisation numérique par la méthode des éléments finis est un outil très efficace permettant de répondre à cette problématique. Nous avons réalisé un modèle numérique sur Cast3m 2013 d'une éprouvette de traction (CT) en vue d'étudier l'évolution de la contrainte et le facteur d'intensité de contrainte dans le ligament de l'éprouvette pour trois niveaux de contraintes appliquées ( $\sigma_a = 356\text{MPa}$ ,  $284\text{MPa}$  et  $148\text{MPa}$ ). Pour l'ensemble des résultats, nous constatons que les trois courbes des contraintes exhibent une évolution parabolique pour se stabiliser à une valeur égale à la contrainte appliquée. Les contraintes maximales se situent au niveau de fond d'entaille. La longueur de l'entaille critique diminue en augmentant la contrainte.

Le modèle éléments finis que nous avons adopté pour notre étude est couramment utilisé et peut être étendu aux applications réelles.

## Références

- [1] Martin Kempeneers , *éléments finis statiquement admissibles et estimation d'erreur par analyse duale*, Mémoire de thèse doctorat Université de Liège Faculté des Sciences Appliquées (2006)
- [2] Damien Fournier, *Analyse et Développement de Méthodes de Ranement hp en Espace pour l'Equation de Transport des Neutrons*, Mémoire de thèse doctorat Université de Provence Marseille (2011)
- [3] A. Hachim , *Etude numérique et validation expérimentale des mécanismes d'endommagement et de fissuration de l'acier S355 : application aux équipements sous pression*, Mémoire de thèse doctorat, Faculté des Sciences-Aïn Chock,Casablanca,(2013)
- [4] A. Hachim , *Numerical Evaluation and Experimental Validation of Stress Concentration and Crack Propagation a Bi-notched Specimen of Steel S355*, International Journal of Research and Reviews in Mechatronic Design and Simulation (IJRRMDS) Vol. 2, No. 3, September 2012, ISSN: 2046-6234
- [5] Hiroshi Yoshihara, *Mode I Critical Stress Intensity Factor of MediumDensity Fiberboard Obtained by Single-EdgeNotched Bending Test* ,Original scientific paper • Izvorni znanstveni rad. Accepted (2014)
- [6] CODAP : *Code de Construction des Appareils à Pression non soumis à la flame* (2005)
- [7] Barsoum *Furthur application of quadratic isoparametric elements to linear fracture mechanics of plate bending and general shells*. Int.J.Num.Meth,Engng , 11,167-169. (1976)

## Experimental study of the tensile behaviour of Polypropylene polymers in hydrochloric acid transport pipes under the effect of thickness and strain rate variation

FATIMA EZZHRA<sup>1</sup>. HARRAT, KHALID<sup>2</sup>.ELHAD, ABDELILAH<sup>2</sup>.HACIM

1. ENSEM : "Ecole Nationale Supérieure d'Électricité et de la Mécanique, Laboratoire de Contrôle et Caractérisation Mécanique des Matériaux et structure, Maroc" [fatimaezzahra.harrati@ensem.ac.ma](mailto:fatimaezzahra.harrati@ensem.ac.ma)

2. ISEM : "Institut Supérieure d'Etude Maritime, Maroc" [elhad\\_khalid@hotmail.com](mailto:elhad_khalid@hotmail.com); [abdelilah.hachim@gmail.com](mailto:abdelilah.hachim@gmail.com)

### Abstract

Since its commercialization in the mid-twentieth century, a wide variety of homopolymers, polypropylene-based copolymers have been produced to match different applications. It's one of the polymers that are used in the manufacture of sports and leisure equipment, in transport, in household appliances, in medical and health products, in clothing, as well as in mechanical installations. , it is used as transporters of hydrochloric acids for the pickling of flat steel sheets. In the present study, we seek to model the damage and the characteristics of the material polypropylene in order to define its constitutive law under a stress in tension, of this fact the experiment consists in carrying out tests in uni-axial tension on dumbbell-type specimens under the effect of a variation in strain rate versus a variation in thickness.

**Keywords :** *Polypropylene, damage, tension, strain rate, thickness*

### 1. Introduction

The choice of Polypropylene (PP) for the manufacture of hydrochloric acid distribution tubes used for steel plate pickling, stems from the many technical and economic advantages brought by this material. PP is a light material with better adhesion to the assembly, which facilitates handling and implementation operations in the field. It has good resistance to corrosion, regardless of field conditions, which avoids the additional costs of applying passive or active protection. In addition, PP systems can withstand the effects of ground movement due to instabilities and large variations in the thickness of industrial facilities. Due to their good resistance to cracking, PP pipes have a high degree of reliability under normal operating conditions.

Polypropylene has exceptional characteristics such as toughness, abrasion resistance, impact resistance, low water absorption (almost zero), low cost of recyclability. In its mode of use, PP components are subjected to axial forces in their operating modes, so it is necessary to predict the damage and deformation of products using PP polymer in case of damage and corrosion. This prediction can facilitate improved product design. Due to the significant time and cost constraints associated with conducting tensile tests with large-scale products, predictions will be made using finite element analysis (FEA).

For example, Kim et al [6] used a finite element technique and optimization to obtain stress-strain curves with temperature variation (low temperature -30°C, room temperature 21°C and high temperature 85°C) and strain rate (ranging from 0.001 to 200 s<sup>-1</sup>) for two typical polymers. Naik and Perla [7] studied the effect of strain rate (200 to 330 s<sup>-1</sup>) on the tensile properties of acrylic. Zrida et al [7] also obtained the mechanical behavior of a copolymer polypropylene material at tensile strain rates of 0.8 to 200 s<sup>-1</sup>. Omar et al [9] studied the tensile stress-strain responses of polycarbonate at high strain rates up to 1750 s<sup>-1</sup>. Most of these studies proved that the mechanical behaviors including Young's modulus, ultimate strain or stress, yield strength, etc.,

The objective of this paper is to present experimental and numerical results under the effect of strain rate and thickness variation on the mechanical behavior of PP polymers. To achieve this objective, a complete design of a wide range of strain rates and thicknesses was studied. The effects of strain rate variation with thickness variation constituting the morphology of acid reservoirs on mechanical performance are also highlighted. A systematic mechanical characterization using tensile tests has been performed on the PP material.

Our work is part of this framework, and is carried out in partnership with major actors of the industry leader in the field of flat steel manufacturing in Morocco.

### 2. Experimental Technique

#### 2.1. Material

The material used is isotactic Polypropylene PP marketed in the form of extruded plates. It is intended for the design of tanks carrying hydraulic acids used for the pickling of steel sheets.

Its mechanical behavior obtained by a tensile test performed on a filament specimen prepared from the same tubes used in this study

#### 2.2. Preparation of the specimens

The selected specimens have the shape of a dumbbell (NF EN ISO 527-2) with different thicknesses. The technique used to prepare the specimens consists in cutting the plate with a saw by varying the feed in the longitudinal direction.

The dimensions of the geometry of the test specimens were cut into barbell specimens according to NF EN ISO 527-2, the specimens are drawn with a speed V=5 mm/min for the characterization test (fig1)



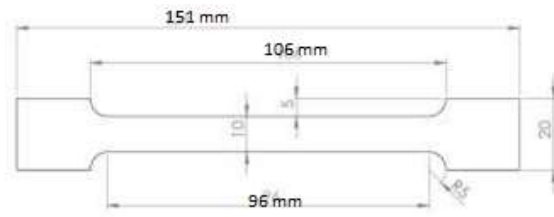


Figure 1: Dumbbell specimen for tensile testing of Polypropylene specimen

### 2.3. Experimental procedure

The tensile test for characterization was carried out on PP specimens with a stretching speed for the tensile test of  $V=5\text{mm/min}$ , a first batch of 3 specimens was prepared to test the elasticity of the virgin material, subsequently a complete plan of the tests carried out on PP was carried out using the same type of specimen with three speed of deformations of tensile tests, thus 3 thicknesses on the dumbbell specimen were chosen in order to study their influence on the mechanical properties.

The test was carried out on the test machine type MTS Criterion Model 45, it is a machine that is available to ISEM (Institut Supérieur d'Etude Maritimes), which allows to perform tests of traction and compression with special jaws dedicated for that, the thickness and type of test specimens (cylindrical prismatic, rectangular, ...), the strength of this type of model varies from 1KN to 600 KN

## 3. Results

For a drawing speed chosen during the test, the specimens are made according to the ISO 527-2 standard, with different thicknesses, it is possible to calculate the rate of deformation according to the relation:  $\dot{\epsilon} = v / L_0$  ( $v$  is the drawing speed,  $L_0$  is the initial length of the specimen).

### 3.1. Uni-axial tensile test

Figure 2 shows the uniaxial tensile curve obtained for the virgin PP material, the figure below shows a large deformation behavior classically observed for semi-crystalline thermoplastic polymers, The PP specimens show elasto-visco-plastic behavior [10]. The test was performed at room temperature. These are tensile tests in imposed displacement, the displacement speed is 5 mm/min

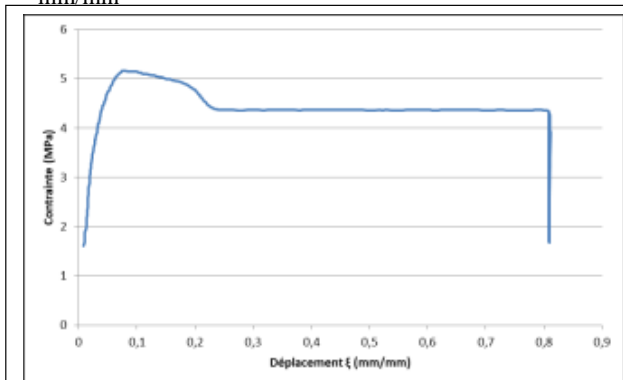


Figure 2: Tensile test curve of a 6mm thick polypropylene specimen at a stretching speed of 5mm/min

test, the damage is reflected by a whitening of the material, the photo below shows a capture of the results of the tensile tests performed on the specimen Figure 3

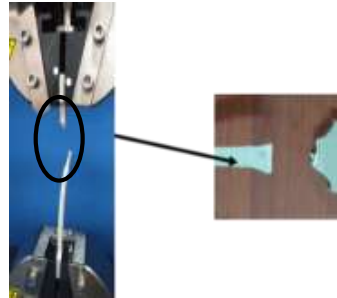


Figure 3: Polypropylene specimen after rupture (tensile test)

### 3.2. Tensile test with constant thickness and variable strain rate

The results of monotonic tensile tests at different strain rates (respectively 5 mm/min; 50 mm/min; 200 mm/min) with a constant thickness for the range of thicknesses chosen for our study are presented in Figures 4, 5 and 6 respectively for thicknesses of (1.2 mm; 6 mm, 8 mm). these thicknesses were chosen according to the industrial structures on which the studies were made. This range of deformation speed largely covers the technical conditions of circulation of hydrochloric acid in the tanks (draining, filling)

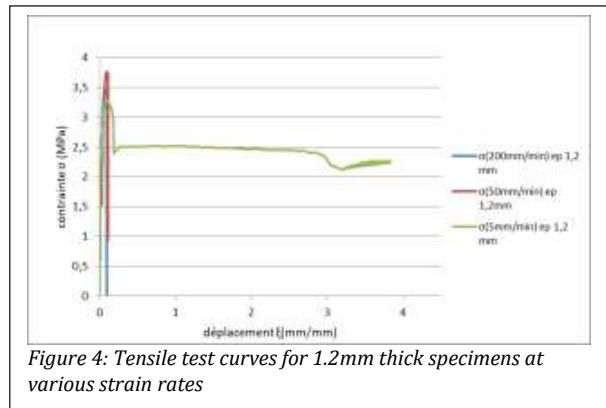


Figure 4: Tensile test curves for 1.2mm thick specimens at various strain rates

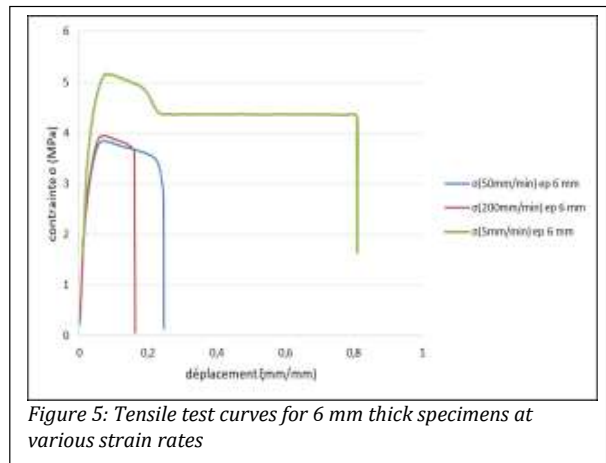


Figure 5: Tensile test curves for 6 mm thick specimens at various strain rates

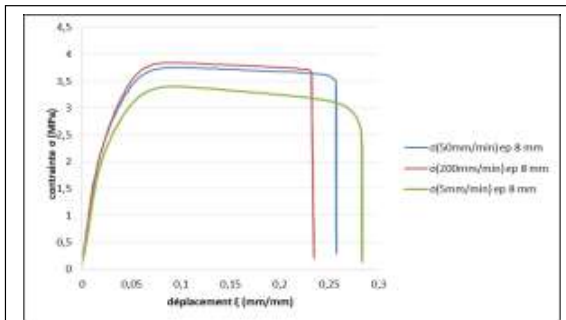


Figure 6: Tensile test curves for 8 mm thick specimens at various strain rates

Figures 4, 5 and 6 show the deformation of the fixed thickness specimens by varying the deformation rate, respectively. It is noted that the thickest specimens were deformed in a very accelerated way compared to the initial batches of specimens of low thicknesses. On the other hand, for thicker specimens, the deformation curves are found to be very close together although measurable deviations are observed. Using these results, the effect of strain rate was also studied. The thickness-strain rate curves for the obtained specimens show that the strain decreases with increasing thickness, similarly with crescendo strain rate (5mm/min; 50mm/min; 200mm/min), the strain in % decreases, a slight decrease in strain for the strain rate of 200 mm/min and 50 mm/min. The variation in strain rate versus thickness can be explained by the state effect of the stresses and strains characterizing the geometry used. For the thinner specimens, the state corresponds to plane stress conditions; on the other hand, the thicker specimens are in plane strain state

#### 4. Discussion

Polymeric materials in general have a phenomenon of energy absorption during traction. The energy absorption capacity of a body is defined as the energy required to cause its rupture. This energy can be determined by integration from the area under the corresponding stress-strain curve to the point of failure. Relative to the normalized section or volume of the specimen studied, it is often defined as the toughness of the material [11].

The specific behavior of polymers is related to the fact that macromolecules do not always react instantaneously to the application of a load. The different molecular chains try to distribute the imposed stresses by physically rearranging themselves until they reach an equilibrium position. If the applied stress is too fast compared to the rearrangement capacity of the molecules.

In the opposite case, if the solicitation is slow; the same materials present a ductile and flexible behavior, due to the sufficient time for the molecular chains to reach an equilibrium position corresponding to the stresses undergone [11].

Thus, polymers exhibit brittle behavior for a large thickness and ductile behavior if they are at a small thickness. An increase in the strain rate breaks the polymer chain and increases the movement of atomic vibrations; this facilitates the processes of molecular

rearrangement to reach an equilibrium position during traction. Therefore, for the same application, polymeric materials can behave in a brittle or ductile way, depending on the conditions of thickness and strain rate.

#### References

- [1] F.A. Ghasemi, I. Ghasemi, S. Menbari, M. Ayaz, A. Ashori, *Optimization of mechanical properties of polypropylene/talc/graphene composites using response surface methodology*, Polym. Test. 53 (2016) 283–292, <https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2016.06.012>
- [2] N. Bahlouli, D. Pessey, C. Raveyre, J. Guillet, S. Ahzi, A. Dahoun, J.M. Hiver, *Recycling effects on the rheological and thermomechanical properties of polypropylene-based composites*, Mater. Des. 33 (2012) 451–458, <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2011.04.049>
- [3] M. Kim, S. Hong, FE, *analysis of refrigerator drop test and the optimization of lower hinge geometry using equivalent static load method*, J. Mech. Sci. Technol. 32 (2018) 5279–5283, <https://doi.org/10.1007/s12206-018-1026-7>.
- [4] Pessey D, Bahlouli N, Pattofatto S, Ahzi S. *Polymer composites for the automotive industry: characterisation of the recycling effect on the strain rate sensitivity*. International Journal of Crashworthiness. 2008;13:411-24.
- [5] Zrida M, Laurent H, Grolleau V, Rio G, Khelif M, Guines D, et al. *High-speed tensile tests on a polypropylene material*. Polymer Testing. 2010;29:685-92.
- [6] Kim JS, Huh H, Lee KW. *Evaluation of dynamic tensile characteristics of polypropylene composites with temperature variation*. Journal of Composite Materials. 2009;43:2831-53
- [7] Naik N, Perla Y. *Mechanical behaviour of acrylic under high strain rate tensile loading*. Polymer Testing. 2008;27:504-12.
- [8] Omar MF, Akil HM, Ahmad ZA. *Mechanical Properties of Nanosilica/Polypropylene Composites Under Dynamic Compression Loading*. Polymer Composites. 2011;32:565-75.
- [9] Fu SQ, Wang Y, Wang Y. *Tension testing of polycarbonate at high strain rates*. Polymer Testing. 2009;28:724-9.
- [10] F. DEJJI, M. MOTILLEBI, *Etude de comportement mécanique des matériaux composites à matrices polypropylène et charge minérale*, Third International conference in Energy Materials, Applied Energetics and pollution, Constantine, Algeria, 2016, 1-2
- [11] Gottfried W. Ehrenstein, Fabienne Montagne *matériaux polymères : Structure, propriétés et applications* ; Hermès science publications, 2000A. Author, Title of the thesis, Thesis, Name of the University, year.

## Caractérisation de l'influence des défauts longitudinaux sur la résistance des tubes en Polypropylène (PPR) à la pression

### Characterization of the longitudinal defects influence on the pressure resistance of Polypropylene (PPR) pipes

A. OUARDI<sup>1</sup>, N. MOUHIB<sup>2</sup>, A. ELGHORBA<sup>1</sup>

1. Laboratoire de Contrôle et Caractérisation Mécanique des Matériaux et des Structures (LCCMMS) – ENSEM, Université Hassan 2 de Casablanca, Casablanca, Maroc.

2. Institut supérieur d'études maritimes, Km 7 Route d'El Jadida, Casablanca, Maroc.

#### Abstract

The development of polymers has not ceased to expand and gain place in our lives. From high performance industries to mass market industries, polymers are present in all areas of our life. In order to characterize the influence of longitudinal defects on the resistance of Polypropylene (PPR) pipes to pressure, burst tests were performed on pre-damaged pipes by longitudinal defects at different depths. The damage assessment by the standard experimental damage model made it possible to determine the damage development stages caused by these defects.

#### Résumé

Le développement des polymères n'a guère cessé de s'agrandir et de prendre un essor de plus en plus accentué dans notre vie. Partons des industries de haute performance aux industries de grande diffusion, les polymères sont omniprésents dans tous les volets de notre vie. Afin de caractériser l'influence des défauts longitudinaux sur la résistance des tubes en Polypropylène (PPR) à la pression, des essais d'éclatement ont été munis sur des tubes pré-endommagés par des rainures à différentes profondeurs. L'évaluation de l'endommagement par le modèle du dommage expérimental normalisé a permis de déterminer les stades d'évolution du dommage causé par ces défauts.

**Mots clefs:** *Polypropylène, défauts circonférentiels, dommage, pression d'éclatement.*

**Keywords:** *Polypropylene, circumferential defects, damage, burst pressure.*

#### 1. Introduction

Les matériaux plastiques prennent une place de plus en plus grandissante dans notre vie, ils sont omniprésents dans tous les secteurs en partant de l'industrie haute performance jusqu'à l'industrie grande diffusion. Ils présentent des alternatives potentielles à un très grand nombre de matériaux, leurs propriétés d'isolation, légèreté, ainsi que leur aspect synthétique, les qualifient pour substituer toute une panoplie de matériaux usuels [1]. Généralement, les travaux de recherches traitant la rupture des polymères soumis à des essais d'éclatement à court terme sont limités, ceci est dû à la difficulté de la détermination des performances mécaniques des tubes à long terme à partir de tels essais. Barker [2] a traité l'influence de la longueur des tubes et la température sur la pression maximale à la rupture des tubes en PEHD soumis aux essais de pression d'éclatement, l'auteur a remarqué que la résistance à l'éclatement des tubes testés a diminué au fur et à mesure que la longueur des tubes augmente. Benhamena et al [3] ont analysé la sévérité des fissures semi-elliptiques situées dans différentes positions dans la paroi d'un tuyau de polyéthylène en utilisant la méthode des éléments finis basée sur le calcul de l'intégrale J, l'accent est mis sur l'effet de la position de la fissure sur l'intégrale J. Les résultats ont prouvé que les fissures axiales sont plus dangereuses que les circonférentielles et que les fissures internes sont plus nocives que celle externes. Toutefois, cette étude a été limitée aux effets de fissures sur la valeur de l'intégrale J et sans aucune validation expérimentale. Le présent travail consiste à caractériser l'influence des défauts longitudinaux sur le comportement des tubes en Polypropylène (PPR) par une adaptation du dommage normalisé aux essais d'éclatement.

#### 2. Méthodologie expérimentale

##### 2.1 Préparation des échantillons

Suivant la norme ASTM D1599 d'essai standard pour la résistance à la pression hydraulique à court terme des tubes et raccords plastiques [4], des tubes vierge en Polypropylène sont préparés (figure 1).

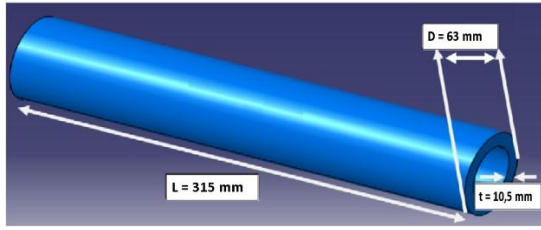


Figure 1 : Dimensions des tubes.

Ensuite, des défauts longitudinaux (figure 2), de 6mm de largeur et des profondeurs allant de 1 mm à 10 mm de l'épaisseur totale du tube "e" avec un pas de 1mm, ont été effectués moyennant d'une fraiseuse universelle.

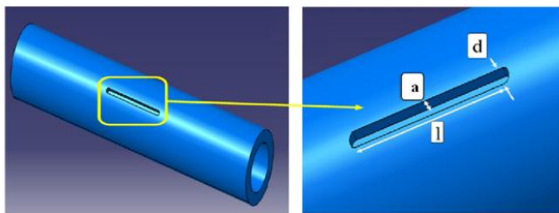


Figure 2 : Description du défaut.

### 2.2 Mode opératoire

Le tube à tester est plongé dans un bac rempli d'eau. Puis, l'éprouvette-tube est remplie d'eau et purgée pour éliminer des bulles d'air. Ensuite, un gradient de pression est appliqué par la pompe hydraulique jusqu'à l'éclatement des tubes, le contrôle de la pression au cours de l'essai est assuré par un pupitre de commande, monté sur la pompe, permettant l'affichage de la pression instantanée et la pression max atteinte à l'intérieur des tubes pendant l'essai. Le but de cet essai est la détermination de l'évolution de la pression ultime résiduelle à la rupture en fonction de la fraction de vie  $\beta = a/e$ . Sachant que la pression ultime du tube sain est celle correspondante à  $\beta = 0$ .

## 3. Résultats

### 3.1 Variation de la pression

La figure 3 présente la variation de la pression ultime à l'intérieur des tubes en fonction de la fraction de vie  $\beta$ .

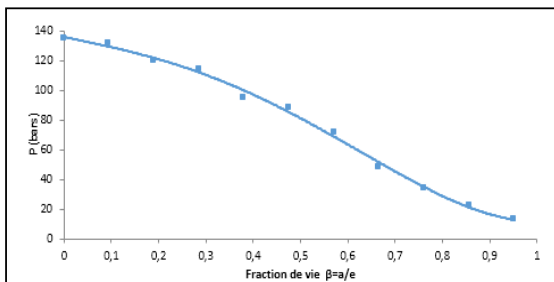


Figure 3 : Variation de la pression d'éclatement en fonction de vie  $\beta$ .

À l'état sain, les tubes peuvent supporter des pressions ultimes de l'ordre de 135 bars. Pour les faibles fractions de vie ( $0 < \beta < 0,28$ ) les pressions ultimes chutent lentement, ceci peut être expliqué par le fait que les défauts longitudinaux ont un faible impact sur le comportement des tubes tant que leurs profondeurs sont inférieures au tiers de l'épaisseur totale du tube. Au-delà, les pressions ultimes résiduelles diminuent d'une manière progressive, ceci est expliqué par une réduction de la capacité des tubes en PPR à résister la pression.

### 3.2 Caractérisation de l'endommagement

Le défi qui s'oppose généralement lors de la quantification de l'endommagement est la mesure précise des paramètres morphologiques intervenants telle que la déformation plastique. Dans la littérature, plusieurs auteurs dont Bui Quoc ont proposé un modèle du dommage normalisé basé sur la variation de la résistance résiduelle entre son état vierge et critique [5]. En tenant compte des modifications nécessaires aux essais d'éclatement, l'expression de la variation du dommage normalisé des tubes en PPR soumis aux essais d'éclatement s'écrit sous la forme de l'équation suivante:

$$D_{EXP} = \frac{1 - \frac{P_{ur}}{P_u}}{1 - \frac{P_a}{P_u}}$$

Avec :

- $P_u$  : La pression ultime d'un tube vierge.
- $P_{ur}$ : Les pressions ultimes résiduelles des tubes entaillés.
- $P_a$  : La pression ultime résiduelle pour la fraction de vie égale à 1.

La figure 4 illustre la variation du dommage normalisé et le dommage proposé par Miner en fonction de la fraction de vie  $\beta$  pour les rainures.

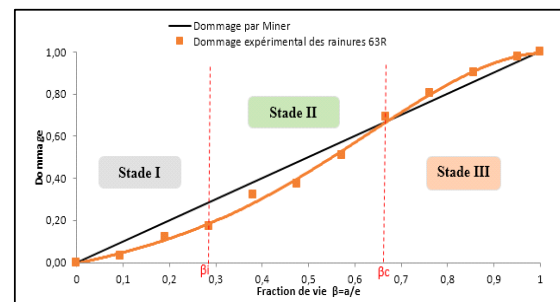


Figure 4 : Evolution du dommage normalisé pour les défauts longitudinaux.

Pour des tubes pré-endommagés par des rainures, dans le premier stade d'initiation de l'endommagement (relatif à des fractions de vie entre 0 et 0,28), le dommage commence par une valeur nulle et croît régulièrement pour avoir une valeur de 0,18 quand  $\beta$  est égale à 0,28. Dans le deuxième stade qui correspond au dommage

progressif, le dommage s'accélère pour passer d'une valeur de 0,18 au début du stade à une valeur de 0,69 quand la profondeur de l'entaille atteint 67% de l'épaisseur totale du tube. À partir de  $\beta_c = 0,67$  commence le troisième stade du dommage brutal caractérisé par un dépassement de la courbe du dommage expérimental de celui du modèle du dommage proposé par Miner ce qui implique que le tube défectueux est considéré défaillant par souci de sécurité.

### 3.3 Fiabilité

La fiabilité d'un dispositif au bout d'un temps  $t$ , correspond à la probabilité pour que ce dispositif n'ait pas de défaillance entre 0 et l'instant  $t$ , dans des conditions d'utilisation déterminées pendant une durée de fonctionnement donnée, on la note  $R(t)$ . Contrairement à la fiabilité, la défaillance  $F(t)$  évolue en sens inverse, elle présente la probabilité de la fin de l'aptitude du système pour accomplir sa fonction requise, au fur et à mesure que le matériau est sollicité, l'endommagement se développe et la probabilité de défaillance croît [6]. Si on assimile le dommage à une probabilité de défaillance, la fiabilité pourra être considérée comme une fonction complémentaire de la fonction du dommage, l'équation suivante résume le lien entre ces deux paramètres:

$$R(\beta) + D(\beta) = 1$$

Avec :

$R(\beta)$  : La fiabilité en fonction de la fraction de vie.

$D(\beta)$  : Le dommage en fonction de la fraction de vie.

Cette relation nous permettra de suivre simultanément l'évolution de ces deux grandeurs comme il est indiqué dans la figure 5.

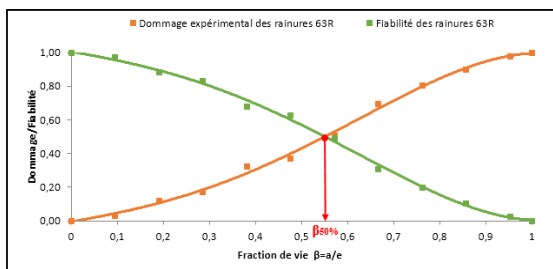


Figure 5 : Courbe de dommage-fiabilité pour les rainures.

La superposition des courbes du dommage-fiabilité permet de définir la fraction de vie à 50% de la fiabilité pour les défauts longitudinaux défauts, permet au service de maintenance de décider sur le moment de la réparation ou changement de la conduite défectueuse. A partir de la figure, on constate que les tubes en PPR ont une fiabilité de 50% quand l'endommagement atteint 57% de l'épaisseur totale du tube.

## 4. Conclusion

Une analyse de l'effet des défauts longitudinaux, modélisés sous formes des rainures, sur le comportement des tubes en Polypropylène (PPR), est présentée dans ce travail. Les résultats ont montrés que l'augmentation de la profondeur de ces défauts a conduit à une chute des pressions ultimes résiduelles des tubes entaillés. En outre, l'adaptation du modèle du dommage normalisé aux essais d'éclatements a permet de définir les trois stades de développement de l'endommagement causé par ce type de défauts.

## Références

- [1] H. Farid, Caractérisation expérimentale et numérique du comportement-endommagement d'une structure thermoplastique non linéaire de type acrylonitrile butadiène styrène ABS, Thèse de doctorat, ENSEM Casa, Université Hassan II-Casa, Octobre 2015.
- [2] Bradley MB, the mechanical behaviour of Polyethylene pipe systems, Phil thesis, USA, April 1982, Brunel University.
- [3] A. Benhamena, B. Bouiadja, A. Amrouche, G. Mesmacque, N. Benseddik, M. Benguediab, Three finite element analysis of semi-elliptical crack in high density polyethylene pipe subjected to internal pressure, Material & design, volume 31, January 2010, pages 3038–3043.
- [4] Standard Test Method for Resistance to Short-Time Hydraulic Pressure of Plastic Pipe, Tubing, and Fittings, ASTM D1599-99, 2003.
- [5] T. Bui Quoc, J. Dubuc, A. Bazergui et A. Biron, «Cumulative Fatigue Damage Under Stress-Controlled Conditions» Journal of Fluids Engineering, vol. 6.
- [6] H. Procaccia, P. Morilhat, R. Carle, G. Menjon, Fiabilité des structures des installations industrielles : Théorie et applications de la mécanique probabiliste, EDITIONS EYROLLES, Paris, France, 1996, pp. XI, 1.

## A MESHLESS APPROACH TO COMPUTE STRESS INTENSITY FACTOR

O. ELMHAIA<sup>1</sup>, Y. BELAASILIA<sup>1</sup>, O. ASKOUR<sup>1,2</sup>, B. BRAIKAT<sup>1</sup>, N. DAMIL<sup>1</sup>

1. Laboratoire d'Ingénierie et Matériaux, Faculté des Sciences Ben M'Sik, Hassan II University of Casablanca, Morocco, oussama.elmhaia@gmail.com

2. Mathematics, Computer Science and Communication Systems Laboratory, National School of Applied Sciences of Safi, Cadi Ayyad University, Sidi Bouzid, BP 63, Safi 46000, Morocco

### Abstract

In this work, the weighted least squares approximation and the stress extrapolation method are combined in this study to propose a meshless approach based on strong formulation for computing stress intensity factors in linear fracture mechanics. The computed stresses are utilized to determine stress intensity factors via the extrapolation method after computing the stresses and displacements near the crack tip using our suggested meshfree approach. The proposed method is thought to be a straightforward and simple way to calculate stress intensity factors. The suggested approach's results are compared to the analytical solutions and J-integral method, in order to demonstrate the accuracy and efficiency of the proposed approach

**Keywords :** *Weighted Least Squares, Stress Intensity Factors, Crack tip, Meshless, Extrapolation method*

### 1 Introduction

Crack modeling is of great importance for the study of structural behavior in fracture mechanics. In the last decade, several works have been devoted to the development of new approaches to model cracks and determine fracture parameters, such as the extended finite element method (XFEM) [6]. This method is an extension of the finite element method, with an enriched crack element that uses, in general, an implicit description of the crack. Other approaches to model crack discontinuity belong to the classes of meshless methods, such as the Element Free Galerkin (EFG) method [1]

In this paper, a new meshfree approach is presented to evaluate Stress Intensity Factors (SIFs). We use the Weighted Least Squares (WLS) method under a strong formulation to extract the displacements and the stresses [2, 3]. In order to compute the SIFs, we use the stress extrapolation method. This method allows us to avoid the mesh generation, numerical integration and nodes connectivity. This could be considered as a direct method to evaluate the SIFs. Usually to evaluate the SIFs, many authors have used the J-integral or the interaction integral. By using the WLS approximation and the crack modelling procedure, the computed displacements and the stresses near the crack tip are used to evaluate the SIFs.

To test the robustness and the accuracy of the proposed approach, a benchmark example is illustrated to compare the analytical and numerical solutions.

### 2 Meshfree approach formulation for LEFM

In this section, we present a description of the proposed meshfree approach. This is based on the weighted least square approximation, the crack modelling and the SIFs evaluation.

#### 2.1 Governing Equations

We consider a two-dimensional, elastic, homogeneous and isotropic solid which occupies a domain  $\Omega$  of boundary  $\Gamma = \Gamma_t + \Gamma_u$ . The strong formulation of equilibrium equations are defined by :

$$\nabla \sigma + b = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

where  $\sigma$  is the stress tensor and  $b$  is the vector of body forces. The equation (1) is completed with the following boundary conditions :

$$\begin{aligned} \sigma \cdot n &= \bar{t} & \text{on } \Gamma_t \\ u &= \bar{u} & \text{on } \Gamma_u \end{aligned} \quad (2)$$

where  $u$  is the displacement vector,  $n$  is the unit normal to the boundary  $\Gamma_t$ ,  $\bar{t}$  and  $\bar{u}$  are the pressure and the displacement imposed on the boundaries  $\Gamma$ . The stress tensor vector, in plane stress, is defined via the Hooke's law by the following equation :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (3)$$

where  $\{\sigma\}$ ,  $\{\varepsilon\}$  and  $[D]$  are given by :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

with  $E$  and  $\nu$  are the Young's modulus and Poisson's ratio respectively. The equilibrium equations under matrix form are :

$$\begin{cases} {}^T[\mathbf{L}]\{\boldsymbol{\sigma}\} + \{\mathbf{b}\} &= \{0\} \\ \{\boldsymbol{\sigma}\} &= [\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \\ \{\boldsymbol{\varepsilon}\} &= [\mathbf{L}]\{\mathbf{u}\} \\ [\mathbf{N}]\{\boldsymbol{\sigma}\} &= \{\bar{\mathbf{t}}\} \\ \{\mathbf{u}\} &= \{\bar{\mathbf{u}}\} \end{cases} \quad (4)$$

where the matrices  $[\mathbf{L}]$ ,  $[\mathbf{N}]$ ,  $\{\mathbf{b}\}$ ,  $\{\mathbf{u}\}$ ,  $\{\bar{\mathbf{t}}\}$  and  $\{\bar{\mathbf{u}}\}$  are defined by :

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}; & [\mathbf{N}] &= \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \\ \{\mathbf{b}\} &= \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix}; & \{\mathbf{u}\} &= \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \\ \{\bar{\mathbf{u}}\} &= \begin{Bmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_y \end{Bmatrix}; & \{\bar{\mathbf{t}}\} &= \begin{Bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

## 2.2 Weighted least square approximation

The approximation of the displacement  $u^h(x)$  at a point of coordinate  $x$  in a support domain via WLS is given by :

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) \mathbf{a}_i = \langle \mathbf{p}(x) \rangle \{ \mathbf{a} \} \quad (6)$$

where  $\langle \mathbf{p}(x) \rangle = \langle p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x) \rangle$  is a vector of monomial basis functions,  $m$  is the number of monomials and  ${}^t\{\mathbf{a}\} = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$  is a vector of the unknown constant coefficients. To determine the vector of constant coefficients  $\{ \mathbf{a} \}$  of equation (6), we choose  $n$  nodes in the support domain. We can solve then the equation (6) for all nodes in the support domain by minimizing the following quadratic form :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i (u^h(x) - u(x_i))^2 \quad (7)$$

where  $w_i$  is the weight function associated to the node  $i$  and  $x_i$ ; ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) are the coordinates of points in the support domain.

Using the minimization of the quadratic form  $J$  we find :

$$\{ \mathbf{a} \} = [\mathbf{A}]^{-1} [\mathbf{B}] \{ \mathbf{U} \} \quad (8)$$

Using equation (8), the local approximation  $u^h(x)$  of equation (6) is written as follows :

$$u^h(x) = \langle \boldsymbol{\phi}(x) \rangle \{ \mathbf{U} \} \quad (9)$$

where  $\langle \boldsymbol{\phi}(x) \rangle$  is the vector of shape functions.

## 2.3 Crack modelling

In order to analyze a two-dimensional solids in Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM), we need to take under consideration the displacement jump and discontinuity near the crack. In meshfree formulation, the diffraction method and the visibility criterion [4] are adopted to represent the displacement across the crack. The diffraction method is introduced to represent the displacement discontinuity when the crack segment cut the line between the considered node and its neighbour nodes, the meshfree shape functions support domain are modified by using the following equation :

$$d = d_0 \left( \frac{d_1 + d_2}{d_0} \right)^\lambda \quad (10)$$

where  $d_0 = \|x - x_i\|$ ,  $d_1 = \|x - x_c\|$  and  $d_2 = \|x_c - x_i\|$ . The exponent  $\lambda$  is used to reduce the size of the support domain behind the crack. A schematic illustration is presented in figure 1.

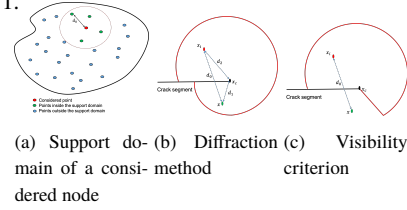


FIGURE 1 – Crack modeling by the meshfree method. In the other hand to employ the visibility criterion, we only need to check if the crack segment cuts the line between the considered point and the other points inside of its support domain and if it's the case the point is excluded from the support domain.

## 2.4 SIFs evaluation

To determine the magnitude of the stress singularity at the crack tip it's important to evaluate the stress intensity factors (SIFs). Each mod of fracture, Mod-I and Mod-II, have an associated stress intensity factors, labelled  $K_I$  and  $K_{II}$ . In this paper, we propose to use the extrapolation method, where we evaluate the SIFs  $K_I$  and  $K_{II}$  as follows :

$$\begin{cases} K_I &= \frac{2Gu_y}{k+1} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} & \text{for } x \rightarrow 0^- \\ K_I &= \sigma_{yy} \sqrt{2\pi x} & \text{for } x \rightarrow 0^+ \\ K_{II} &= \frac{2Gu_x}{k+1} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} & \text{for } x \rightarrow 0^- \\ K_{II} &= \sigma_{xy} \sqrt{2\pi x} & \text{for } x \rightarrow 0^+ \end{cases} \quad (11)$$

where the origin of the  $x$  axis reside at the crack tip,  $G$  is the shear modulus and  $k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$  for plane stress. This technique usually requires very fine mesh in the vicinity of the crack tip in order to obtain a more accurate singular stress field.

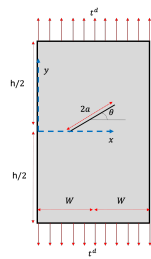
In the rest of the paper the meshless approach combined with the displacement extrapolation method will be noted WLS-DE and the one combined with the stress extrapolation will be noted WLS-SE.

$a/W$	WLS-SE		WLS-DE		Integral method		Reference [5]	
	$\frac{K_I}{t^d \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}}{t^d \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I}{t^d \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}}{t^d \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I}{t^d \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}}{t^d \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I}{t^d \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}}{t^d \sqrt{\pi a}}$
0.2	0.517	0.509	0.501	0.515	0.516	0.508	0.518	0.507
0.3	0.543	0.512	0.538	0.520	0.546	0.514	0.544	0.516
0.4	0.573	0.533	0.579	0.521	0.573	0.525	0.572	0.529
0.5	0.617	0.534	0.620	0.551	0.613	0.542	0.612	0.546
0.6	0.666	0.571	0.669	0.581	0.663	0.564	0.661	0.567

TABLE 1 – Comparison of the fracture parameters between the obtained numerical solutions and those of reference

### 3 Slanted centre crack

A rectangular plate containing a slanted center crack under an uniform tension  $t^d$  symmetrically applied at both top and bottom ends as shown in figure 2. The orientation of the crack is indicated by the angle  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . The aspect ratio between the height and the width of this plate is given by  $h/W = 2$ . The crack has a length  $2a$ . The mechanical properties are as follows : Young modulus  $E = 210\text{GPa}$  and Poisson's ratio  $\nu = 0.3$ . The plate is fixed on the right edge and pinned for  $h = 0$

FIGURE 2 – Rectangular plate with a central Slanted crack, an aspect ratio  $h/W = 2$  under an uniform traction  $t^d$ 

In table 1, we present MOD-I and MOD-II SIFs obtained by the extrapolation method and those of references. It is observed that the obtained results are in a good agreement with those given by references. We noticed that the stress intensity factor increases when the crack length increases. In figure 3, the von Mises stresses distribution is presented for the aspect ratios  $a/W = 0.5$ .

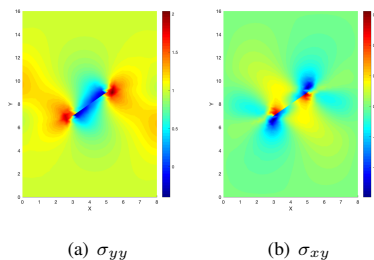


FIGURE 3 – Stress distribution

### 4 Conclusion

In this study, we have proposed a meshfree approach based on the WLS method under strong formulation coupled with the extrapolation method for the computation of the SIFs. The proposed meshless approaches have shown great accuracy to compute the SIFs with either the stress or the displacement extrapolation method. These approaches can be considered as efficient alternative methods to compute the SIFs for bi-dimensional structures.

### Références

- [1] Belytschko, T., Lu, Y. Y., Gu, L. (1994). Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(2), 229-256.
- [2] Elmhaia, O., Belaasilia, Y., Braikat, B., Damil, N. (2020, June). Solving Non-linear Elasticity Problems by a WLS High Order Continuation. In *International Conference on Computational Science* (pp. 266-279). Springer, Cham.
- [3] Elmhaia, O., Belaasilia, Y., Askour, O., Braikat, B., Damil, N. (2021). An efficient mesh-free approach for the determination of stresses intensity factors. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 133, 49-60.
- [4] Organ, D., Fleming, M., Terry, T., Belytschko, T. (1996). Continuous meshless approximations for nonconvex bodies by diffraction and transparency. *Computational Mechanics*, 18(3), 225-235.
- [5] Murakami, Yukitaka. "Stress intensity factors." (1987).
- [6] Sukumar, N., Moës, N., Moran, B., Belytschko, T. (2000). Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *International journal for numerical methods in engineering*, 48(11), 1549-1570.



## ETUDE EXPERIMENTAL DU COMPORTEMENT MECANIQUE DE L'AME CENTRALE EXTRAIT D'UN CABLE METALLIQUE DE LEVAGE ENDOMMAGE PAR CORROSION

M. MEKNASSI<sup>1,2,\*</sup>, M. MOURABIT<sup>3</sup>, A. WAHID<sup>4</sup>, M. ELGHORBA<sup>2</sup>, S. MORDANE<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire Sciences de l'Ingénieur, ESTEM, Casablanca, Maroc  
meryammeknassi@gmail.com

<sup>2</sup>Laboratoire de Contrôle et de Caractérisation Mécanique des Matériaux et des Structures, ENSEM, Université Hassan II, Casablanca, Maroc

<sup>3</sup>Laboratoire de Physique des Polymères et Phénomènes Critiques, Faculté des sciences Ben M'sik, Université Hassan II, Casablanca, Maroc

<sup>4</sup>laboratoire de physique de la matière condensée, Faculté des sciences Ben M'sik, Casablanca 7955, Université Hassan II, Casablanca, Maroc

### Résumé

Le comportement mécanique de l'âme d'un câble métallique de levage endommagé par corrosion a été étudié dans cet article. La mise en situation expérimentale au laboratoire a été accélérée par l'immersion des échantillons des âmes dans des solutions à 30% de H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> à différentes durées d'immersion. Les essais mécaniques de traction sur l'ensemble des éprouvettes corrodées ont montré une diminution de la force ultime résiduelle après seulement 8 heures d'immersion. Cette diminution devient très rapide dans les dernières heures d'immersion. Ces résultats sont reliés à l'expression du dommage normalisé de la théorie unifiée, afin d'évaluer le niveau d'endommagement. Par la suite et avec l'établissement de la relation Dommage-Fiabilité, les trois stades de dommage ont été déterminés ; le stade d'initiation du dommage, le stade du dommage progressif et le stade où le dommage est brutal. Par conséquent, être en mesure d'intervenir à temps pour la maintenance prédictive.

**Mots clefs:** Câble métallique, âme, corrosion, essai de traction, dommage, fiabilité.

### 1. Introduction

Les câbles métalliques sont utilisés dans de nombreux domaines comme le génie civil l'industrie, les équipements de traction et de levage, les téléphériques, les ponts suspendus, les grues portuaires et des applications similaires [1].

Un câble métallique est composé d'un grand nombre de fils d'acier disposés en hélice autour d'un fil central pour construire les torons, qui sont encore enroulés ensemble autour d'une âme textile ou métallique pour construire le câble (figure 1).

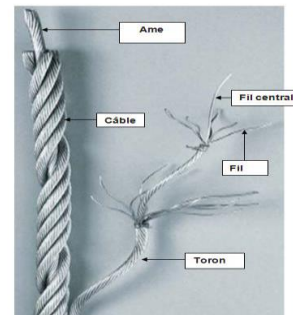


Figure 1. Éléments constitutifs d'un câble métallique L'âme du câble est le noyau autour duquel les torons sont pondus et sont disposés de manière hélicoïdale. Sa principale fonction est de rendre les torons positionnés de telle manière que la contrainte appliquée sur le câble est répartie uniformément entre eux.

### 2. Partie expérimentale

#### 2.1 Matériaux

Les fils étudiés ont été extraits d'un câble métallique de type 19\*7 (19 torons 7 fils) de constructions antigiratoire (1\*7 + 6\*7 + 12\*7) de diamètre 8mm, composé de l'acier clair graissé, à âme métallique, croisé à droite, préformé, utilisés notamment dans les grues à tour et les ponts roulants (figure 2).

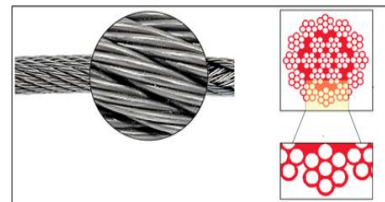


Figure 2: Câble antigiratoire (19\*7)

Les caractéristiques mécaniques du câble étudié sont présentées dans le tableau 1.

Tableau 1 : Caractéristiques du câble étudié 19\*7

Diamètre du câble	8 mm
Construction du câble	19 x 7
Construction du toron	6/1
Catégorie du matériel	Galvanisé
Type de l'âme	RHR
Diamètre de l'âme	1,83 mm
Masse par unité de longueur	0,272 kg/m
Lubrification	A2/W-3
Résistance au fils	1970 N/mm <sup>2</sup>
Force minimale de rupture	41,14KN

La longueur minimale des échantillons des âmes torons est égale à la longueur d'essai 200 mm plus celle nécessaire à l'amarrage. Par conséquent, une longueur de 300 mm a été prévue comme étant la longueur d'essai pour les fils (figure 3). La tolérance de mesure en longueur est de ± un millimètre pour l'ensemble des échantillons prélevés [3].



Figure 3 : Longueur d'essai pour les épreuves âmes

### 2.2 Essais de corrosion accélérée

Le principe des essais de corrosion accélérée que nous avons adopté dans cette étude, consiste à délimiter, sur des échantillons des éléments constitutifs du câble étudié de 300 mm de longueur, des zones au milieu de 100 mm, marquées par un scotch, qui seront par la suite immergés dans des solutions d'acide sulfurique de 30% à une température ambiante (figure 4,5). Sachant que les changements de température, l'approvisionnement et les vibrations de l'oxygène sont des facteurs importants qui peuvent affecter (accélérer ou ralentir) le temps de la corrosion [4].



Figure 4. Echantillon d'âme préparé pour l'immersion dans 30% de H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>

La figure montre un schéma explicatif des essais de corrosion accélérée procédé dans cette étude.

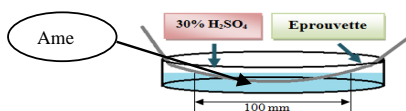


Figure 5. Schéma explicatif des essais de corrosion accélérée

La période des essais de corrosion que nous avons choisie est de 40 heures pour l'ensemble des épreuves. La récupération des épreuves s'effectue chaque 8 heures.

### 2.3 Machines d'essais

Les essais de caractérisation des fils sont réalisés dans le laboratoire de LPEE, à l'aide d'une machine de traction dénommée Zwick Roell, de capacité 10 KN à la température ambiante (figure 6). Les vitesses programmées pour ces essais sont : 2mm/min.

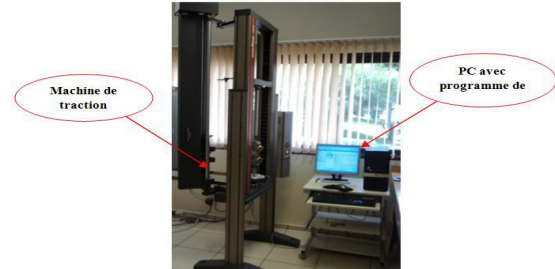


Figure 6. Machine de traction Zwick Roell 10KN

## 3. Résultats expérimentaux et discussions

### 3.1 Caractérisation mécanique de l'âme et de toron

Les courbes moyennes traitées à partir des essais de traction réalisés sur l'ensemble des épreuves de l'âme et de toron sont donnés dans la figure 7.

L'âme possède une force maximale très élevée qui est égale à 4700 N, cependant le toron possède une force maximale qui est égale à 2714 N. On peut dire que cela se justifie par la différence entre le diamètre de l'âme et le diamètre du toron.

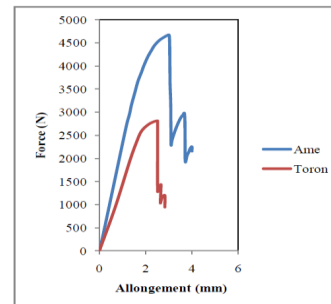


Figure 7. Courbes moyennes forces-déplacement pour l'ensemble des épreuves âmes et torons

### 3.2 Résultats des essais mécaniques après corrosion

La figure 8 décrit les courbes force – déplacement en 3D dans le cas des âmes corrodées à différentes durées d'immersion dans H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>.

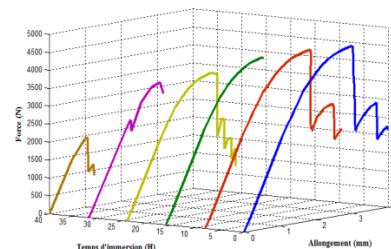


Figure 8. Comportement en traction des âmes corrodées à différents temps d'immersion

Les résultats de la figure 8 montrent une baisse de la force à la rupture en traction pour des durées d'immersion de plus en plus grandes. On note un fort impact de la corrosion sur le comportement mécanique des fils. Lors de l'essai mécanique de traction, on constate une diminution de la force de rupture à la traction qui s'accélère au fur et à mesure que le nombre d'heures d'immersion dans la solution de H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> augmente ainsi qu'une fragilité des fils qui devient très déclarée dans les dernières périodes d'immersion.

### 3.3 Estimation du dommage expérimental des âmes corrodées

Le dommage des âmes corrodées est exprimé par [1]:

$$D = \frac{1 - \frac{F'_{ur}}{F'_u}}{1 - \frac{F'_a}{F'_u}} \quad (1)$$

Avec  $F'_{ur}$  la valeur ultime résiduelle des âmes à différents temps d'immersion,  $F'_u$  la valeur de la force ultime de l'âme à l'état vierge et  $F'_a$  la valeur de la force critique.

La variation du dommage en fonction de fraction de vie  $\beta$  est illustrée par la courbe sur la figure 9 avec les conditions aux limites suivantes :

$$\beta = 0 \rightarrow F'_{ur} = F'_u \rightarrow D = 0$$

$$\beta = 1 \rightarrow F'_{ur} = F'_a \rightarrow D = 1$$

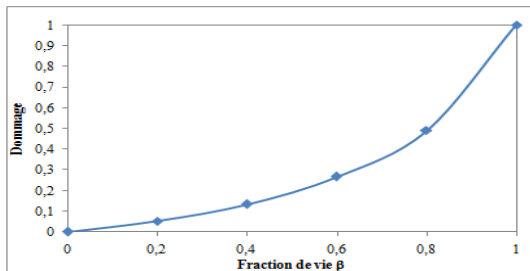


Figure 9. Evolution expérimental du dommage des âmes corrodées

La courbe de l'évolution du dommage expérimental des âmes corrodées présente une allure croissante. En effet, dans les premières X

### 3.4 Relation Dommage - Fiabilité des âmes corrodées

L'équation (1) nous a permis de tracer la courbe de variation de la fiabilité en fonction de la fraction de vie  $\beta$  superposée avec celle de l'endommagement (Figure) :

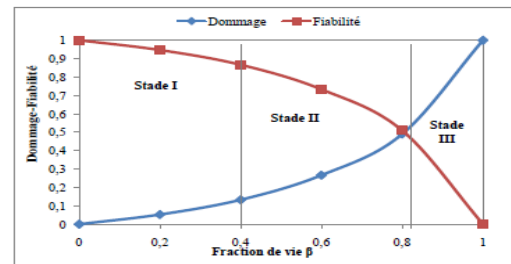


Figure 10. Superposition des courbes Dommage - Fiabilité dans le cas des âmes corrodées

Selon la figure 10, nous avons pu distinguer les trois stades du dommage pour les âmes corrodées, le zone 1 qui correspond à l'initiation du dommage [0 ; 0,4], la zone 2 [0,4 ; 0,82] propagation du dommage, et la zone 3 qui correspond au dommage brutal [0,82 ; 1].

## 4. Conclusion

Un câble métallique de structure antigiratoire de type 19x7 a été utilisé comme l'objet de notre recherche pour évaluer le niveau du dommage par corrosion de l'âme qui est l'élément principale ou bien le noyau du câble métallique.

Les essais mécaniques de traction sur l'ensemble des éprouvettes (fil du toron, fil central du toron, toron et l'âme) corrodées à différentes périodes d'immersion dans 30% de H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> ont montré une diminution de la force ultime résiduelle après seulement 8 heures d'immersion. Cette diminution devient très rapide dans les dernières heures d'immersion.

## Références

- [1] V. Oksanen, P. Andersson, K. Valtonen, K. Holmberg, V.-T. Kuokkal. Characterization of the wear of nodular cast iron rollers in contact with wire ropes. *Wear* 308 (2013) 199–205. Hebeish, A. and El-Rafie, M. H. *American Dyestuff Reporter*, 79(7), 1990, pp. 34A. Auteur, Titre du livre, Editeur, New York, année.
- [2] M. MEKNASSI, M. BARAKAT, A. TIJANI, M. EL GHORBA. Characterization of Residual Energy Loss and Damage Prediction of wire Rope wires Exposed to Sulfuric Acid, *International Journal of Engineering Research and Development (IJERD)*, Volume 13, Issue 3, March 2017, PP 94-99.
- [3] Norme ISO 6892 « Matériaux métalliques Fils Essai de traction » 1984.
- [4] M. MEKNASSI, Etude expérimentale et caractérisation des mécanismes d'endommagement des éléments constitutifs d'un câble métallique de levage endommagés par corrosion Objectif industriel : prédiction de la durée de vie, Thèse, Université Hassan II Ecole nationale Supérieure de Mécanique et Electrique, 2017.
- [5] A. Tijani, M. Meknassi, H. Chaffoui, M. Elghorba. Combined effect of broken rope components and corrosion on damage evolution through its lifetime, *J. Mater. Civ. Eng.* 29 (7) (2017)04017035, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)MT.1943-5533.0001846](https://doi.org/10.1061/(ASCE)MT.1943-5533.0001846).

## Caractérisation de la propagation du délaminage du contreplaqué de *Ceiba* en mode I, mode II et mode mixte I+II

A. EL MOUSTAPHAOUI, A. CHOUAF, Kh. KIMAKH

LM2I, ENSEM, Université Hassan II, Casablanca, Maroc.

anouar.most@gmail.com, a.chouaf@ensem.ac.ma, khadija.kimakh@gmail.com

### Abstract

The complexity of plywood panel damage makes the prediction and characterization of their breakage a very difficult task. Among these predominant damages, we find the delamination. However, to characterize the propagation of the delamination of *Ceiba's* plywood panels, we used the energy approach which considers that crack propagation is a phenomenon of energy dissipation. The fundamental parameter of this approach is the energy restitution rate ( $G$ ). To determine this parameter in mode I ( $G_I$ ), mode II ( $G_{II}$ ) and mixed mode I+II ( $G_T$ ), we opted for DCB test, ELS test and MMF test respectively. These tests allowed us to anticipate the delamination and to know these zones of initiation and propagation of the crack.

**Keywords:** *Plywood, delamination, energy restitution rate, DCB test, ELS test, MMF test.*

### Résumé

La complexité de l'endommagement des panneaux de contreplaqué rend la prédiction et la caractérisation de leur rupture une tâche très difficile. Parmi ces endommagements prédominants, nous trouvons le délaminage. Cependant, pour caractériser la propagation du délaminage du contreplaqué de *Ceiba*, nous avons fait appel à l'approche énergétique. Le paramètre fondamental de cette approche est le taux de restitution d'énergie ( $G$ ). Pour déterminer ce paramètre en mode I ( $G_I$ ), mode II ( $G_{II}$ ), et mode mixte I+II ( $G_T$ ), nous avons opté pour les essais DCB, essai ELS et l'essai MMF respectivement. Ces essais nous ont permis de d'anticiper le délaminage et de savoir ces zones d'amorçage et de propagation.

**Mots clefs:** *Contreplaqué, délaminage, taux de restitution d'énergie critique, essai DCB, essai ELS, essai MMF.*

### 1. Introduction

L'arrivée de dérivés et de composites à base de bois, présentant des caractéristiques plus intéressantes que sa forme naturelle, a donné un nouvel élan industriel à ce matériau [1]. L'un des meilleurs dérivés et composites de bois est le panneau de contreplaqué. Le contreplaqué est un

panneau constitué de minces feuilles de bois obtenues par déroulage. Ce panneau se distingue par une superposition des plis à fils croisés, la cohésion des plis est assurée par collage et pressage à chaud. Ce procédé pourrait engendrer divers défauts macroscopiques. Parmi ces défauts, nous pouvons citer le délaminage, des micro-vides ou des impuretés [2]. Dans cette présente étude, nous allons nous intéresser principalement au délaminage.

### 2. Matériaux étudiés

Pour réaliser les essais DCB (Double Cantilever Beam), ELS (End Load Split) et MMF (Mixed Mode Flexure), nous avons préparé des éprouvettes du contreplaqué de *Ceiba* ayant les dimensions suivantes (Tableau 1).

Tableau 1: Dimensions des éprouvettes

Longueur (w)	Largeur (b)	Epaisseur (h)
240	80	18

Lors de la fabrication des éprouvettes, la fissure initiale est réalisée par insertion d'un film de Téflon de faible épaisseur servant à amorcer le délaminage. La machine utilisée pour effectuer ces essais est une machine d'essai universelle de type MTS 810 qui permet la conduite d'essais de traction contrôlés. Cette machine enregistre les variations de la charge en fonction du déplacement.

### 3. Caractérisation du délaminage

Dans le cadre de la présente étude, nous avons réalisé une série d'essais DCB, ELS et MMF, à partir desquels des courbes typiques de la réponse en charge-déplacement ( $P-\delta$ ) sont présentées. A partir de ces résultats expérimentaux, les taux de restitution d'énergie critique ( $G_{IC}$ ), ( $G_{IIC}$ ) et ( $G_{TIC}$ ) seront déterminés. Une fois ces valeurs connues, il sera alors possible de prédire et d'anticiper le délaminage du contreplaqué.

### 4. Résultats expérimentaux et discussions

Les essais ont été réalisés sur une machine de traction à déplacement imposé égal à de 1,5 mm/min.

#### 4.1. Essai DCB

Nous rappelons que pour caractériser ce mode de rupture, nous faisons souvent appel à l'essai DCB (Double Cantilever Beam). Cet essai consiste à faire propager une fissure au sein d'un joint collé sollicité en traction et à mesurer la résistance de ce joint à la propagation de cette fissure [3].

#### 4.1.1. Courbes charge-déplacement

Nous rappelons que pour nos essais, nous avons considéré plusieurs cas de figure du rapport  $a_0/w$ . Pour présenter nos résultats, nous avons rapporté dans la figure 1 les cas les plus marquants ( $a_0/w = 0,37 - 0,42 - 0,47$ ).

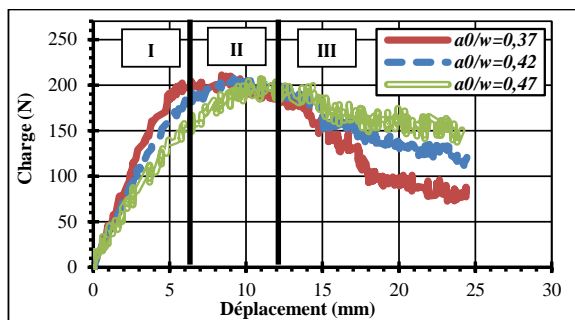


Fig. 1. Courbes expérimentales charge-déplacement de DCB.

En analysant les courbes tracées dans la Figure 1, nous pouvons distinguer trois principales phases du comportement lors de l'essai.

Dans la phase I, la charge augmente de façon linéaire avec le déplacement imposé jusqu'à l'amorçage du délaminage. Ensuite, au début de la propagation de la fissure, nous avons observé une augmentation de la charge suivie d'une étape où la charge reste quasi stable (phase II). Finalement, la propagation du délaminage se traduit par une décroissance de la charge en fonction de l'évolution de la fissure (phase III).

D'une façon générale, la première partie des courbes représentent la propagation stable de la fissure. Tandis que la chute de la charge indique une propagation de la fissure instable. Durant les essais, l'évolution de la fissure est restée relativement stable.

Le comportement non linéaire de la courbe charge-déplacement est du généralement au pontage des fibres. L'augmentation de la charge est associée à la création d'un pont de fibres. Tandis que la chute de la charge indique la rupture du pont. Durant les essais, la croissance de la fissure est restée relativement stable, le pontage des fibres formé au fond de la fissure est très observé.

Pour déterminer expérimentalement la complaisance ainsi que le taux de restitution d'énergie critique  $G_{IC}$  relatifs à la structure étudiée, nous allons faire appel à trois méthodes expérimentale et une méthode analytique celle de la théorie des poutres (TP).

Afin de comparer les résultats obtenus à partir des trois lois de complaisance, nous avons d'abord déterminé la complaisance de chaque éprouvette. Puis, nous avons réalisé des interpolations selon la loi de Berry (LB), la loi linéaire en  $a_0^3$  issue de la théorie modifiée des poutres (TMP) et selon la méthode de calibration de la complaisance (CC).

Nous considérons les essais réalisés comme stables parce qu'il n'y pas de changement brutal de la charge au cours des essais réalisés.

Pour une longueur de la fissure initiale  $a_0/w=0,50$ , la variation des trois approches par rapport à celle issue de la théorie des poutres a été déterminée. Le taux de restitution d'énergie critique  $G_{IC}$  calculé selon les quatre approches est mentionné dans le tableau 2.

Tableau 2. Comparaison entre le  $G_{IC}$  issu des approches expérimentales et celui de la théorie des poutres pour  $a_0/w=0,50$ .

Mode I	Approche théorique	Approches expérimentales		
Approche	TP	LB	TMP	CC
$G_{IC}$ (J/m <sup>2</sup> )	184	157	167	171
Ecart type (J/m <sup>2</sup> )		27	17	13
Coefficient de variation (%)		14,67	9,24	7,06

Selon ces résultats, il est clair que la théorie des poutres (TP) donne les résultats les plus élevés, par contre la loi de Berry (LB) donne les résultats les plus faibles. Les écarts des approches expérimentales ne dépassent pas 15% par rapport à la théorie des poutres.

En effet, la LB ne prend pas en considération la rotation des microfissures dans la zone délaminée. Cela entraîne une sous-estimation des valeurs du  $G_{IC}$ .

## 4.2. Essai ELS

### 4.2.1. Courbes charge-déplacement

Pour déterminer le taux de restitution d'énergie critique en mode II ( $G_{IIC}$ ), nous avons opté pour l'essai ELS qui se caractérise par sa stabilité par rapport à l'essai ENF [4]. Le côté sain de l'éprouvette est encastré dans un support mobile alors que le côté contenant le défaut artificiel est chargé dans la direction de l'épaisseur.

Nous procédons de la même manière que l'essai DCB, nous traçons la courbe de la charge déplacement pour plusieurs cas de figure ( $a_0/w = 0,60 - 0,63 - 0,72$ ).

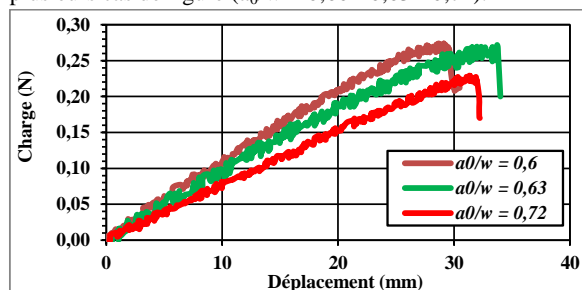


Fig. 3. Courbes expérimentales charge-déplacement de ELS.

En analysant les courbes tracées dans la Figure 3, nous pouvons remarquer que la charge augmente de façon linéaire avec le déplacement imposé suivi par une

décroissance brutale de la charge. La variation de la charge est moins marquante si on la compare à l'essai DCB. En effet, le pontage des fibres est presque négligeable.

En exploitant les courbes de la charge-déplacement, nous avons obtenu les résultats du taux de restitution d'énergie critique  $G_{IIc}$  mentionnés dans le Tableau 3.

Pour un rapport  $a_0/w=0,70$ , la variation des trois approches par rapport à celle issue de la théorie des poutres a été déterminée. Le taux de restitution d'énergie critique en mode II  $G_{IIc}$  calculé selon les quatre approches est indiqué dans le Tableau 3.

Tableau 3. Comparaison entre le  $G_{IIc}$  issu des approches expérimentales et celui de la théorie des poutres pour  $a_0/w=0,70$

Mode II	Approche théorique	Approches expérimentales	
Approche	TP	TMP	CC
$G_{IIc}$ (J/m <sup>2</sup> )	295	263	272
Ecart type (J/m <sup>2</sup> )		32	23
Coefficient de variation (%)		10,84	7,79

Selon ces résultats, comme précédemment, la théorie des poutres donne les résultats les plus élevés. Nous pouvons également noter que la TMP et la méthode CC sont très proches. Les écarts des approches expérimentales considérées ne dépassent pas 11% par rapport à la théorie des poutres.

### 4.3. Essai MMF

#### 4.3.1. Courbes charge-déplacement

L'essai MMF est très pratique à déployer parce qu'il utilise le même montage et la même éprouvette que ceux de l'essai ELS. Dans cette configuration, l'éprouvette subit à la fois un chargement de mode I et un chargement de mode II.

Nous avons rapporté dans la figure 5 les cas les plus marquants ( $a_0/w = 0,62 - 0,64 - 0,66$ ) des courbes charge-déplacement.

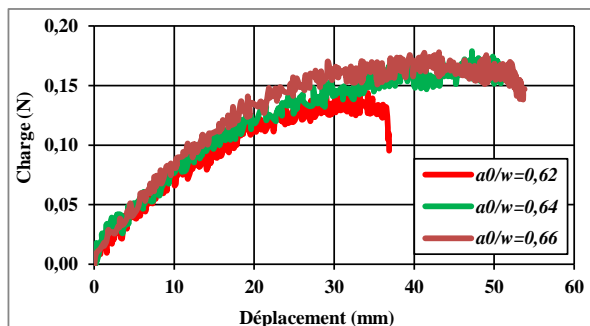


Fig. 5. Courbes expérimentales effort-déplacement de MMF.

Nous pouvons remarquer que pendant cet essai, la phase élastique représente une non linéarité remarquable.

Pour un rapport  $a_0/w=0,64$ , la variation des trois approches par rapport à celle issue de la théorie des poutres a été déterminée. Le taux de restitution d'énergie critique total  $G_{TC}$  calculé selon les trois approches est mentionné dans le Tableau 4.

Tableau 4. Comparaison entre le GTC issu des approches expérimentales et celui de la théorie des poutres pour  $a_0/w=0,64$

Mode mixte I+II	Approche théorique	Approches expérimentales	
Approche	TP	TMP	CC
$G_{TC}$ (J/m <sup>2</sup> )	243	217	225
Ecart type (J/m <sup>2</sup> )		26	18
Coefficient de variation (%)		10,69	7,40

Les résultats obtenus à partir des deux lois empiriques sont très proches. Ils sont inférieurs à ceux issus de la théorie des poutres d'environ 10%.

## 5. Conclusion

Dans cette étude, nous nous étudier la caractérisation de la propagation du délaminage des panneaux de contreplaqué de *Ceiba* qui se distingue par sa bonne résistance au délaminage. A cet égard, nous avons fait appel à une approche énergétique. Nous avons donc réalisé des essais expérimentaux, et avons choisi les essais DCB, ELS et MMF qui sont les plus utilisés pour caractériser le mode I, mode II et mode mixte I+II respectivement. A partir des courbes charge-déplacement, nous avons déterminé les taux de restitution d'énergie critique. Ces valeurs critiques en mode I, en mode II et en mode mixte I+II, nous a permis de prédire et d'anticiper la propagation de délaminage du contreplaqué de *Ceiba*.

## 6. Références :

- [1] CLAUDEL J.B. Caractérisation du comportement mécanique de panneaux de contreplaqué sous sollicitation de flexion et flexion-compression. PhD Thesis, Université de Metz, France; 2002.
- [2] FOUGEROUSSE M, BARRAY R, DEON G. Résistance des panneaux contreplaqués à la pourriture : premiers essais sur l'influence de l'épaisseur des plis. Revue Bois et Forêt des Tropiques 1982; 197.
- [3] IRWIN GR. Fracture I. Handbuch der Physik 1958; 6 : 558-90.
- [4] DUCEPT F, GAMBY D, DAVIES P. A mixed-mode failure criterion derived from tests on symmetric and asymmetric specimens. Compos Sci Technol 1999; 59 : 609-19.

# La triaxialité des contraintes comme paramètre d'évaluation de la distance effective en approche volumétrique de la mécanique de la rupture en mode II

B. El Hadim<sup>1</sup>, H. El Minor<sup>2</sup>

1. Département de Mécanique / CRMEF, Settat, Maroc

2. Equipe de Recherche MMS / ENSA, Agadir, Maroc

## Abstract

The distribution of stress triaxiality is determined in the vicinity of notch defect performed in the specimen submitted to compression load. The calculations are carried out by using 3D finite element analysis and experimental tests. The evaluation of notch stress intensity factor is made by using the volumetric approach. In sliding mode of fracture mechanics, a new method to evaluate the effective distance in this approach is proposed.

**Keywords:** *Stress triaxiality, notch defect, stress intensity factor, sliding mode, volumetric approach and effective distance.*

## 1. Introduction

The critical stress intensity factor in fracture mechanics, or so called fracture toughness is used to characterize the fracture phenomenon. Several approaches can be used to determine the stress intensity factor, in particular for the linear fracture mechanics performed in the opening mode (mode I). In this paper, the volumetric approach is applied as describe in section IV. This approach can also be used to extend the study to the elastic-plastic materials, and for other fracture modes.

Failure criteria are often based on the maximum tangential stress which is the predominant stress. To take into account the tridimensional stress field surrounding the notch (or crack), we use a parameter called stress triaxiality.

In this paper,  $\beta$  is used as a measure of stress triaxiality. This parameter is defined as the ratio of the hydrostatic stress over the equivalent Von Mises stress:

$$\beta = \frac{\sigma_h}{\sigma_{eq,VM}} \quad (1)$$

Where:

$$\sigma_h = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}$$

And:

$$\sigma_{eq,VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

It is well known that ductile fracture is sensitive to the stress triaxiality. There are several indicators to quantify the state of constraints at defect tip in the literature. Over the list of these indicators, one can quote the T-Stress [1], the Q parameter [2], the multiaxiality parameter [3] and the  $p$  parameter [4].

The evaluation of notch stress intensity factor is made by using the volumetric approach which supposes that the fracture process requires a certain fracture volume. This volume is assumed as a cylinder with effective distance at its diameter [5]. In this paper, we propose a new method based on stress triaxiality to evaluate the effective distance.

## 2. Material

The material studied is high-strength steel 45CrMoSi6 according to the French standard. Its mechanical and chemical proprieties are listed in Table I and Table II.

**Table I**

Chemical proprieties of 45CrMoSi6

C	Mn	Si	Cr	Mo
0.45	0.6	1.6	0.6	0.25

**Table II**

Mechanical proprieties of 45CrMoSi6

E (GPa)	$\nu$	$\sigma_Y$ (MPa)	$\sigma_U$ (MPa)	A%	Density (kg/m <sup>3</sup> )
210	0.28	1463	1662	2.8	7800

## 3. Geometrical characteristics

Tests were performed using U-notched circular specimens (Fig.1) with the external radius  $R_e=20$  mm, internal radius  $R_i=10$  mm, thickness  $B=7$  mm, and the notch length  $a=4$  mm. Different notch radii were obtained using a wire-cutting electrical discharge machine (EDM). Four notch radii are considered:  $\rho = 0.3$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\rho = 1.0$  and  $\rho = 2.0$  mm. The specimens are submitted to compression load in order to determine the critical loads when the fracture occurs. These loads are introducing to the simulation computation to finally evaluate the critical notch stress intensity factor and the stress triaxiality evolution.

To determine the load inclination angle  $\alpha$  relative to the notch plane and for which the ring specimen is stressed in pure mode II, Tamine [6] used three different methods based on: the analytical approach, the finite element calculation and experimental tests. These three methods gave the same angle value, that is  $\alpha = 33^\circ$ .

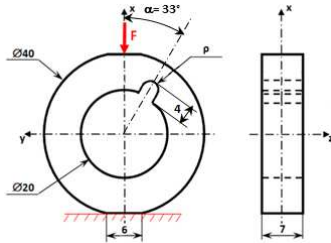


Fig. 1. Specimen geometry and compression load.

#### 4. Notch stress intensity factor and volumetric method

Stress distributions around the notch defect have been converted into so called notch stress intensity factor using the notch fracture mechanics and particularly the volumetric method.

The volumetric method is a local fracture criterion, which supposes that the fracture process requires a certain fracture volume. This volume is assumed as a cylinder with effective distance at its diameter.

The elastic-plastic stress distribution along the ligament is plotted in the bi-logarithmic diagram as can be seen in Fig.2:

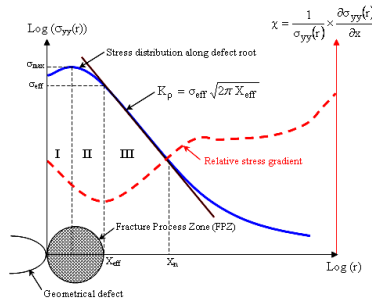


Fig.2. Schematic elastic-plastic stress distribution along notch ligament and stress intensity concept.

The notch stress intensity factor [N.S.I.F] is defined as function of effective distance and effective stress:

$$K_\rho = \sigma_{eff} \sqrt{2\pi X_{eff}} \quad (2)$$

The effective distance corresponds to the minimum of the relative stress gradient which given as:

$$\chi(r) = \frac{1}{\sigma_{yy}(r)} \frac{\partial \sigma_{yy}(r)}{\partial r} \quad (3)$$

The effective stress is considered as the average volume of the stress distribution over the effective distance. However stresses are multiplied by a weight function in order to take into account the influence of stress gradient

due to geometry and loading mode. The effective stress is defined as:

$$\sigma_{eff} = \frac{1}{X_{eff}} \int_0^{X_{eff}} \sigma_{yy}(r) \times (1 - r \times \chi(r)) dr \quad (4)$$

#### 5. Finite element analysis

The part modelled in 3D analysis is meshed by quadrangular elements with eight nodes. Computing was carried out on Castem software 2020.

By using the maximum hoop stress as failure criterion, the stress distribution was simulated front of the notch (Fig.3) in the sliding mode of fracture.

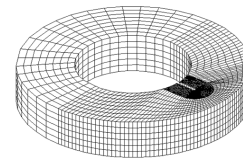


Fig.3. Mesh density in specimen.

By adopting the criterion of the maximum tangential stress, it has been shown experimentally [6] that, in the mode II, the fracture is initiated for an angle between the median plane of the notch and the point of the notch tip where the hoop stress is maximal. This angle is called a bifurcation angle  $\theta_0$  (Fig.4).

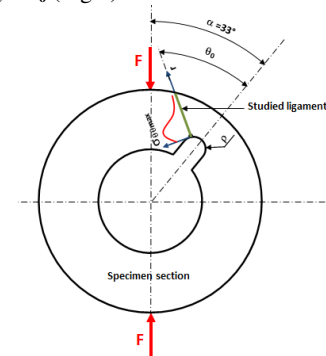


Fig.4. Studied ligament in the notch tip of specimen.

The results of numerical simulations exhibit that for all notch radii, the hoop stress  $\sigma_{\theta\theta}$  which is maximal at the bifurcation angle, is predominant (Fig.5). Then, we will be interested in the radial direction in the  $\theta_0$  orientation of specimen where the crack is expected to occur first and grow up radially (Fig.4).

The stress evolutions are plotted versus the notch tip distance for each radius (Fig.6). The maximum stress values decrease when the notch radius increases.

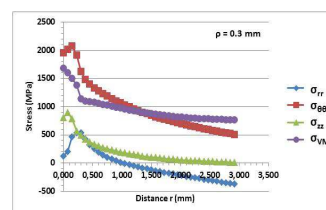


Fig.5. Stress distributions in the notch tip ligament.



### 6. Results

The critical notch stress intensity factor (C.N.S.I.F.) noted  $K_p^c$  is computed by using the critical loads leading to the fracture specimens by experimental tests. The critical effective distance  $X_{eff}^c$  and the associated critical effective stress  $\sigma_{eff}^c$  are given by numerical simulations. These two characteristics are taken into account to determine the C.N.S.I.F.  $K_p^c$  by using the relation (2). The results are summarized in table III.

**Table III**  
Critical Notch Stress Intensity Factor for various notch radii

Notch radius $\rho$ (mm)	Critical effective stress $\sigma_{eff}^c$ (MPa)	Critical effective distance $X_{eff}^c$ (mm)	Critical notch stress intensity factor $K_p^c$ (MPa.m <sup>0.5</sup> )
0.30	1688.640	0.225	63.481
0.50	1807.658	0.300	78.481
1.00	1658.094	0.600	101.806
2.00	1627.525	1.200	141.321

The evolution of the relative stress gradient along the notch ligament is given in Fig.6 for each considered radius. The critical effective distance  $X_{eff}^c$  corresponds to the minimum of relative stress gradient, as mentioned in section IV. All effective distances and associated effective stresses are reported above, in table III.

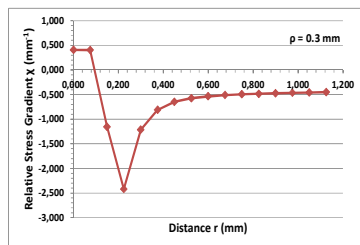


Fig.6. Relative stress gradient distribution in the notch tip ligament.

The stress triaxiality evolutions along the ligament are shown in Fig.7. These curves present two convex forms with an intersection in a point (M). It is proven that this intersection point is at a distance  $d_M$  on the ligament which corresponds to the effective distance  $X_{eff}^c$  (Table IV). One can conclude that the stress triaxiality can be used to determine the effective distance as that can be made with the relative stress gradient. The effective distance is then:

$$X_{eff}^c = d_M \tag{5}$$

Where the point M is located at a distance  $d_M$  and defined as:

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow d_M + \frac{d\beta}{dr}} > 0 \\ \lim_{r \rightarrow d_M - \frac{d\beta}{dr}} < 0 \end{cases} \tag{6}$$

**Table IV**

Comparison of distance  $d_M$  with effective distance  $X_{eff}^c$ .

Angle $\rho$ (mm)	effective distance $X_{eff}^c$ (mm)	distance $d_M$ (mm)
0.30	0.225	0.225
0.50	0.300	0.300
1.00	0.600	0.525
2.00	1.200	1.200

According to the figure below, we can also note that the amplitude of the critical maximum of triaxiality decreases when the notch radius increases.

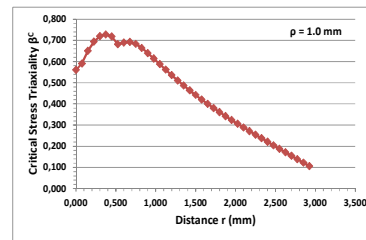


Fig.7. Critical stress triaxiality evolutions in the notch tip ligament.

### 7. Conclusion

The maximum tangential stress is used as fracture criterion. In order to take into account the tridimensional stresses; the evolution of stress triaxiality  $\beta$  is studied along the notch ligament at the bifurcation angle  $\theta_0$ . The stress triaxiality curves reveal two convex forms whose point of intersection is located at a distance noted  $d_M$  which proved to be equal to the effective distance  $X_{eff}^c$ . One can conclude that stress triaxiality can be used to determine the diameter of fracture elaboration zone in volumetric approach. In other words, the value of the effective distance can be obtained from the stress triaxiality and it is equal to  $d_M$ .

### References

- [1] C. Betegon, J. W. Hancock, *Two parameter characteristics of elastic-plastic crack tip fields*, *J. Appl. Mech.* 58, pp. 104-101, (1991).
- [2] N.P. O'Dowd, C.F. Shih, *Family of crack tip fields characterized by a triaxiality parameter I: Structure of fields*, *J. Mech. Phys. Solids*; 39, pp. 898-1015, (1991).
- [3] H. Clausmeyer, K. Kussmaul, E. Roos, *Influence of stress state on the failure behaviour of cracked components made of steel*, *ASME, Appl. Mech. Rev.* 44 (2), pp. 77-92, (1991).
- [4] O. Akourri, I. Elayachi, *Stress Triaxiality as Fracture Toughness Transferability Parameter for Notched Specimens*, *International Review of Mechanical Engineering*, (2007).
- [5] H. El Minor, *Rupture fragile en mode mixte amorcée à partir d'entaille*, Thèse de Doctorat, Université de Rabat, Morocco, (2002).
- [6] T. Tamine « Amorçage de fissures par fatigue-contact », Thèse de Doctorat, Université de Metz, France (1994).

# RESIDUAL LIFE ASSESSMENT OF METALLIC STRUCTURES. CETIM's METHODOLOGY.

M. BENNEBACH<sup>1</sup>, B. DEPALE<sup>1</sup>

1. CETIM, 52 avenue Felix Louat, 60304 Senlis, France  
[mohamed.bennebach@cetim.fr](mailto:mohamed.bennebach@cetim.fr); [bruno.depale@cetim.fr](mailto:bruno.depale@cetim.fr)

## Abstract

Being able to accurately predict the residual life of structures or equipment that have been in service for many years is a major concern of many industrial sectors. This makes it possible to guarantee operational safety, increase facilities availability, and in a circular economy context reduce costs and environmental footprint relative to maintenance or replacements. Despite the importance of the RLA subject, references or detailed methods for dealing with it are limited. This paper presents a general methodology for assessment and management of residual life of structures developed by CETIM, the French Technical Institute for Mechanical Industry, with an example of industrial application case.

**Keywords:** Residual life, design life, fatigue life, steel structures.

## 1. Introduction

Residual life of an equipment refers to time remaining before a major failure or loss of functionality is observed given the age of the equipment, its condition, its past and future mission profile. The concept of residual life assessment is based on knowledge of mission profiles (usage/loadings), material characteristics and degradation laws (fatigue being a preponderant degradation mechanism in most in-service failures). Motivations for residual life assessment of an asset are multiple:

- Change or evolution in usage conditions,
- Occurrences of exceptional or unforeseen events (example: shocks, overloads, earthquakes ...),
- Observations of deteriorations: defects or damaged elements, abnormal vibrations, corrosion ...
- Legal reasons (standard service life reached...).

When a manufacturer or operator faces one or several from these situations, the following legitimate questions arise:

- Can the equipment continue to operate safely and for how long?
- Can the service life be extended safely given the current known state, past and future states?

There exist methodologies, supported by established rules or standards that can answer such questions, but this is not in a systematic form; it depends on the type of

equipment and frequently with no specific references existing.

Moreover, most of the rules or standards dedicated to the design of structures or machines are only intended for the determination of lifetime, at a design stage. Not all of them can be easily made to apply to the case of aged equipment, for which an extension of the service lifetime is sought because keeping the equipment in operation may be desirable, e.g. for economic reasons. Such extension may increase the risk of fatigue failures.

The assessment should calculate the residual life of the equipment and determine the details of future inspections, and eventually derating and/or repairs.

This paper presents a specific methodology developed by CETIM (Technical Institute for Mechanical Industry) to evaluate and extend safely the service lifetime of industrial equipment. An industrial application case illustrating the method is also given.

## 2. CETIM's (Technical Institute for Mechanical Industry, France) general methodology for residual life assessment

### 2.1 Feedback based on experience

CETIM is composed of numerous divisions (e.g., Simulation, Metallic Materials and Surfaces, Fatigue, Assemblies, Failure Analysis...) that have regularly to deal with evaluation of residual life or extension of service lifetime for a wide range of equipment.

The evaluation of some of those structures or equipment can be done with specific rules or standards [1], [2], [3], but for many others no procedure exists.

The methodology developed by CETIM is simpler than the CETMEF one [4] that was thought for a particular type of crane and directly connected to a single reference, i.e., FEM Rules 1.001. It is also more generalist than the procedure described in the JRC Report [5], thought for steel structures only and linked to the Eurocode standard EN 1993-1-9.

### 2.2 CETIM's methodology

CETIM's methodology can be divided into six phases and its flowchart is shown in Figure 1 with the details of each step/phase given below:

- Phase 1: Preliminary evaluation;
- Phase 2: Assessment of load cases (optional);
- Phase 3: Special Evaluation – 3.1 Global calculations and 3.2 Detailed inspection;

- Phase 4: Local complementary investigations (optional);
- Phase 5: Evaluation of Residual Life;
- Phase 6: Extension or not of Service life.

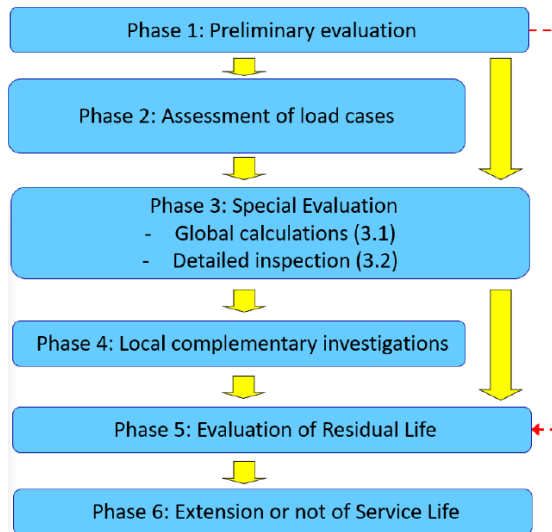


Figure 1 : CETIM's methodology flowchart

Details of content of each phase are given in the following section.

#### - Phase 1: Preliminary evaluation

This is a key phase of the methodology, because it is centered on the reconstruction, with owner's participation, of equipment/structure history, using loading history (number of cycles, load spectrum...), main maintenance operations or modifications and main failures, damages reported.

When available, initial design assumptions (e.g., proof of fatigue strength) are checked and a short inspection of structure/equipment is done with owner's participation, for a comparison with the original drawings if they are available, for future modelling.

After that, a first report is delivered on preliminary analysis stage with evaluation of the level recommended for further investigation and detailing planning inspection program and next phases.

#### - Phase 2: Assessment of load cases (optional)

This Phase is activated only if Phase 1 does not result in reliable input data for load cases and they can be determined by monitoring, visual observation during a relevant period, use of standards/rules giving standardized loadings/spectra... Load cases resulting from Phase 2 should be agreed by owner of equipment, before using them in Phase 3.1.

An ISO standard such as ISO 9374-1 "Information to be provided" [6] can be useful during that phase.

#### - Phase 3: Special Evaluation

##### 3.1: Global calculations

It usually consists of a Finite Element Analysis with a refined model. Load cases and combinations, as well as configurations, are based on input data from previous

phases. Critical points and main stress concentrations shall be identified, regarding the fatigue behavior, and eventually buckling/static proof if needed.

##### 3.2: Detailed inspection of structure/equipment

This phase completes Phase 1 Inspection, it is more detailed and focused on identified concentration stress areas. It is usually visual, but it can be completed using Non Destructive Testing techniques. The main purpose is identifying fatigue phenomena related to the past duty; using state of the art control methods.

#### - Phase 4: Complementary local investigations (optional)

Phase 4 is activated only if Phase 3 results are not globally reliable, e.g., when the local loadings of constructional details classified as critical require a more accurate evaluation, or when a numerical zoom is necessary, or more generally when conclusions are difficult to give. When the design fatigue life of equipment has expired or when cracks have been detected, it is necessary to calculate the remaining life using advanced methods such as the fracture mechanics ones, which are not yet routinely mastered by many engineers in industry. Only these techniques will result in reliable inspection intervals.

#### - Phase 5: Evaluation of residual life

Residual life is evaluated for the various operational scenarios retained, using updated or modern rules/references, with a clear separation in the analysis between the past operations and the future expected ones. The severity of the critical areas and defects reported is also highlighted.

The fatigue strength of constructional details may be decreased compared to their theoretical values from standards when the quality of execution has been reported as bad from the Phase 3.2 inspection.

In that phase, it may be necessary to deal with risk acceptance criteria.

#### - Phase 6: Extension or not of Service life

The final report is delivered with all results and assumptions, from all previous Phases, all remedial measures and period until next evaluation and updated inspection planning.

Pragmatism is the keyword for this phase, because if the assessment of equipment results in the extension of service lifetime instead of its service being terminated, it may be a combination of:

- Repairs,
- Proposal of inspection plan, with local focus on critical areas that can have different inspection periods (which will be adapted by site feedback),
- Installation of monitoring systems (black boxes cycle counters, strain gages...),
- Declassification/derating (decrease of the rated load for a crane, for example).

### 3. Industrial application case

The purpose of the study has been to estimate the residual life of manipulating devices for AIRBUS A380

components. The manipulating devices consist of articulated components installed on a trolley with a travelling motion on a bridge crane, which itself is travelling on a fixed portal frame (see Figure 2).

They were installed in 1999 and the desire of AIRBUS has been to keep them in service until 2027, to support the A380 program.

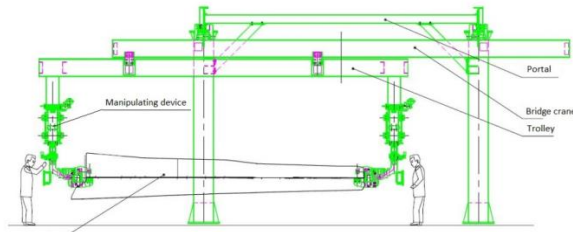


Figure 2: Load manipulating device principle

During **Phase 1** (Preliminary evaluation) load spectra have been established from the production records on industrial site, geometric configurations and working cycles of the devices have been determined thanks to a close collaboration with the operators. Initial calculation reports have been studied and notably the assumptions made in the original proof of fatigue strength.

During **Phase 2** (Assessment of load cases) new load combinations have been prepared, based on FEM 1.001 because it was the reference for original design.

Finite Element Analyses (FEA) have been performed during **Phase 3.1** (Global calculations), and some stress concentration areas have been identified, e.g. in the arm of the manipulating device (see Figure 3).

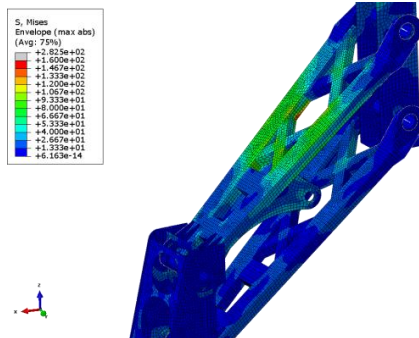


Figure 3: Typical stress distribution in an arm for a load combination

During **Phase 3.2** (Detailed inspection of structure/equipment) after its complete visual inspection (of structures and mechanisms) the equipment has been reported as globally healthy and with very few defects.

**Phase 4** (Complementary local investigations) was not required in the present case with no fatigue cracking or defects identified on the structures during our detailed inspection, in the previous phase.

At final, the evaluation of residual life, **Phase 5**, was done using the factor  $f_1$  from ISO 12482 for a scenario 2017-2027.

In **Phase 6** (Lifetime extension), as a result of the assessment, service life extension has been granted with no repairs required and inspection periods defined considering fatigue damages of different members of the supporting structure, bridge crane, trolley or manipulating devices.

#### 4. Conclusion

Residual life assessment of structures and equipment has been progressively dealt with an increasing number of references. But those documents are still limited compared to the size and complexity of the problem.

All existing methods are based on several steps that must be conducted in sequence.

A good evaluation of residual life requires at least a combination of expertise in Inspection, NDT, Engineering Analysis often including Finite Element Analysis and a good familiarity with Fatigue Calculations. Techniques of Fracture Mechanics and Reliability Analysis are more and more required.

CETIM has progressively developed its own methodology of assessment of existing equipment/structures, and this has been briefly described, together with its application to an industrial case.

The environmental benefit of life extension of equipment is also more and more considered.

#### Acknowledgements

Authors would like to acknowledge and thank all industrials members from the “Mobile Machinery Program Committee” of CETIM, for their support and active participation in the project.

#### References

- [1] Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-9: Fatigue; EN 1993-1-9, 2005
- [2] FEM 1.001:1998, Rules for the design of hoisting appliances (3rd edition)
- [3] EN 13001-3-1, Cranes — General Design — Part 3-1: Limit States and proof competence of steel structures
- [4] Recommandations applicables aux appareils de levage "anciens" dans les ports, Guide Technique, CETMEF, 2003
- [5] Assessment of existing steel structures: recommendations for estimation of remaining fatigue life, background documents in support to the implementation, harmonization and further development of the Eurocodes, joint report, EUR 23252 EN – 2008
- [6] ISO 9374, Cranes – Information to be provided

## Toughness of biomaterial used in implantology with numerical methods

A. ESSAKHI<sup>(1)</sup>, A. BOULEZHAR<sup>(1)</sup>, M. EZZAHMOULY<sup>(2,3)</sup>, Z. HATIM<sup>(2)</sup>,  
A.MOUTAWAKIL<sup>(3)</sup>

- (1) *Laboratory of Renewable Energies and Systems Dynamics (LERDYS) Faculty of Sciences Ain Chock, Casablanc Morocco. Email: [Essakhi\\_aziz@yahoo.fr](mailto:Essakhi_aziz@yahoo.fr) / [boulezhara@gmail.com](mailto:boulezhara@gmail.com)*  
 (2) *Team of Energy, Materials and Environment, Department of Chemistry, Faculty of Sciences, Chouaib Doukkali University, El Jadida, Morocco. Email: [ezzahmoulymnl@gmail.com](mailto:ezzahmoulymnl@gmail.com) / [zineb.hatim@yahoo.fr](mailto:zineb.hatim@yahoo.fr)*  
 (3) *Research Laboratory in Optimization, Emerging Systems, Networks and Imaging, LAROSERI, Computer Science Department, Chouaib Doukkali University, Eljadida, Morocco. Email: [elmsn@hotmail.fr](mailto:elmsn@hotmail.fr)*

### Abstract

The With a field displacement method, which we compared to Kaneinnen's rule for different fissures lengths [1]; and compared results between the two obtained methods show the targeted approach. Inspired by a numerical program without finite elements. We have proposed a study on the isotropic pure Titan material compartment while of overloading. At first, we have applied a criterion of preliminary fissures on the material above mentioned. This criterion consisted of taking the maximal charge just when the constraint of fissure breaches its ultimate value. Once we dispose of the critical charge, and the critical displacement, we carry out the calculation of the critical intensity of stress factor.

**Keywords :** *Titanium Critecal charge Toughness*

### 1. Introduction

We exploit the mechanics of the rupture. We have proposed the calculation of the intensity of stress factor for the fissured isotropic material, the screw used in implantology [2, 3]. With a field displacement method, which we compared to Kaneinnen's rule for different fissures lengths [1]; and compared results between the two obtained methods show the targeted approach. Inspired by a numerical program without finite elements. We have proposed a study on the isotropic pure Titan material compartment while of overloading. At first, we have applied a criterion of the preliminary fissures on the material of the fissure breaches its ultimate value. Once we dispose of the critical charge, and the critical displacement, we carry out the calculation of the critical intensity of stress factor [2, 3].

### 2. Dimensions of fissured piece

The pieces intended to be used in adjoint prosthesis are often fissured in advance by a manufacturing deficiency or

simply by biochemical degradation. The study is carried out on a part of a fissured piece, the problem involves only mode I, which is more frequent. Figure '1' shows the dimensions of a fissured piece where P is the applied charge of 131N, which is, corresponds to the mastication force [3]. The geometrical parameters are symmetric in the vertical as shown in figure 1. 'h' is the height which is equal to 2.5mm. 'L' is the length that is equal to 32mm. 'C' is the ligament. 'b' is the thickness of our test piece which is equal to 0.1mm. finally 'a' is crack length. [9,10]

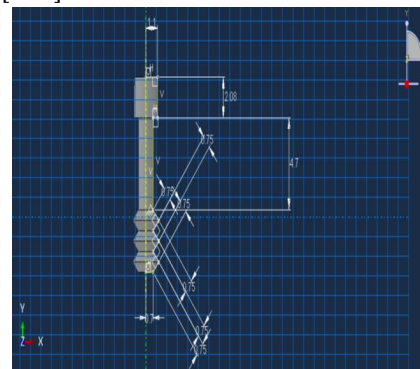


Figure 1. The dimensions of a fissured piece

### 3. Calculation of the intensity of stress factor with Kaneinnen's formula

Kaneinnen managed to elaborate his own model which permits to give the restitution rate of the energy according to the test geometry and elastic models, thus he was able to calculate the intensity of stress factor in mode I for isotropic materials. The obtained KI (a) formula is the following [2,9,10]:

$$K_1(a) = \frac{2\sqrt{3}Pa \left[ 1 + 0.64 \frac{h}{a} \right]}{bh^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

With P the applied charge, h is half height of the test tube, a is the length of the fissure and b is the test tube width.

#### 4. The displacement field method

The displacement of the fissure borders, it's self a function of K, may be decomposed into three components:  $U_x$  parallel to the fissure plan and perpendicular to the front.  $U_y$  perpendicular to the fissure plan and  $U_z$  parallel to the fissure front. Each of these components corresponds to an elementary rupture mode; Mode I for the compont  $U_z$  (figure of mode of fissure). The most dangerous cracks generally happen in mode I that is why most of studies concerning mechanical rupture were carried out on this very mode [9.10]. We then deduce the factor K of the index I.

The expression of the displacement field [5.9.10]:

$$K_I = \frac{2 \mu U_y}{\sqrt{\frac{r}{2\pi} [(3-\nu)(1+\nu)+1-2\cos^2(\frac{\theta}{2})]}} \quad (2)$$

With  $\mu$  Lamé's Coefficient.

#### 5. Critical Parameters of rupture

This part aims at studying the material comportment by increasing the sollicitation, and deducing the critical values for which the fissure starts spreading within the tested test-tube.

##### 5.1. Criterion of the ultimate stress

This criterion admits that a critical value of the constraint exists in the fissure front, called ultimate constraint and written  $\sigma_u$ , as:

$$\begin{cases} \sigma < \sigma_u & \text{Fixed fissure} \\ \sigma = \sigma_u & \text{fissured advancement} \end{cases} \quad (3)$$

For a given length of a fissure, we increase the charge P until that the constraint at the front of the fissure reaches its ultimate value  $\sigma_u = 350$  MPa [6] given by experimentation and then we deduce the critical charge  $P_c$ .

Then by using the measured couple ( $P_c, \delta_c$ ), we proceed to the critical parameter of rupture: critical intensity of stress factor, the rate of theoretical release of energy and Rice's critical integral.

##### 5.2. Critical intensity of constraint factor

###### a- The critical charge

The determination of critical parameter:  $K_{Ic}$ , relies essentially on the determination of the critical charge  $P_c$ , the charge at the moment of preliminary rupture [10].

The Figure.2. above mentioned clearly shows the charge values fall simultaneously with the reach of its critical value, whereas the displacement continues to increase, making the material risky and exposed to rupture.

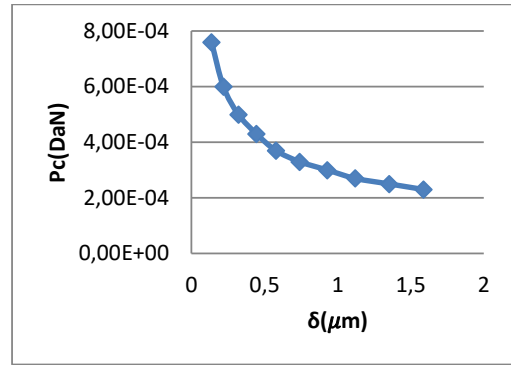


Figure 2. Critical load versus displacement for Titanium

###### b- The critical intensity of constraint factor

The critical intensity of constraint factor ( $K_{Ic}$ ) is determined by the Kaneinen's formula for isotropic materials [9.10]:

$$K_{Ic} = \frac{2\sqrt{3}P_c a \left(1+0.64\frac{h}{a}\right)}{bh^{\frac{3}{2}}} \quad (4)$$

$P_c$  : Critical charge /  $a$  : Fissure length /  $h$  : The test tube height /  $b$  : The test tube width

The figure 3 shows the variation of  $K_{Ic}$  according to the fissure length. In conclusion, the critical intensity of constraint factor  $K_{Ic}$  is independent of fissure length.

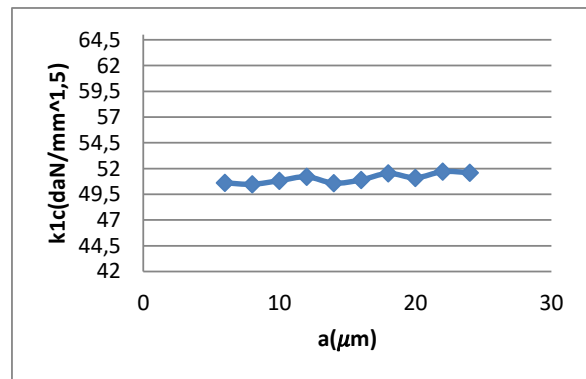


Figure 3.  $K_{Ic} = f(a)$  in Titanium

##### 5.3. The rate of the critical restitution of energy in Nickel-Chrome:

The rate of theoretical restitution of energy is determined according to a curve smoothing of 3<sup>rd</sup> degree of the graph.  $C = f(a)$  ( $C$  is the complaisance) practically; for a linear material,  $G_{Ic}$  is calculated by the formula [9.10]:

$$G_{Ic} = \frac{P_c^2 \partial C}{2 \partial a} \quad (5)$$

The following Figure 4. represents the variation of  $G_{Ic}$  according to the fissure length. To conclude, the

rate of theoretical restitution of energy is independent of the fissure length 'a'.

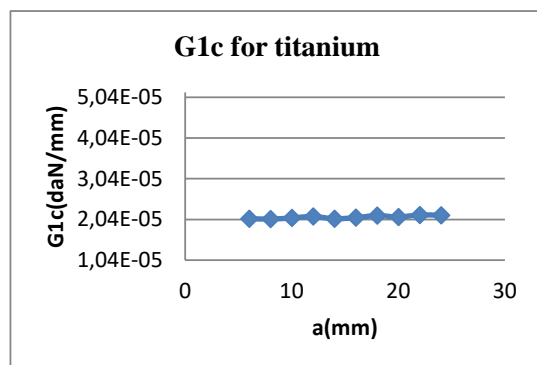


Figure 4.  $G1c = f(a)$  in Titanium

## 6. Conclusion

We have proposed in work to study the isotropic material compartment which is the biomaterials used in imlantology while an over loading. At first, we have applied a preliminary criterion on the already mentioned material; this criterion consists of deducing the maximal charge at the moment when the fissure reaches its ultimate value. Once, we dispose of the critical charge and the critical displacement, we move to the calculation of critical intensity of constraint factor, the rate of theoretical restitution of energy and Rice's critical integral. A numerical study been carried out to determine the critical values of breaking; we can synthesize the obtained results by the following conclusions; the test tube fragileness as the default within it widens which explain the fall of the charge values after the fissure propagation.

## References

- [1] S. Jamel , M. Nayif ,A. Abdulla,  
Influence of different surface treatments of nickel chrome metal alloy and types of metal primer monomers on the tensile bond strength of a resin cement. 2019
- [2] M. Özcan , C. Hämmerle,  
Titanium as a Reconstruction and Implant Material in Dentistry: Advantages and Pitfalls, 2012
- [3] M. Mohammed, A. Khan, N. Siddiquee,  
Beta Titanium Alloys: The Lowest Elastic Modulus for Biomedical Applications: A Review Vol:8 No:8, 2014
- [4] S. Grange, J. Loup  
La Mécanique de la Rupture et la Mesure de la Ténacité PRENSIER 20/04/2007
- [5] P. Takaki, M. Vieira, S. Bommarito,  
Maximum Bite Force Analysis in Different Age. Jul-Sep 2014
- [6] G. Rotta , T. Seramak , K. Zasińska  
Estimation of Young`s Modulus of the Porous Titanium Alloy with the use of fem Package.2015
- [7] SAS ZIR TECH CENTRE. Contact@zirtechcentre.com. Date de téléchargement 07/09/2013
- [8] M. Duflot  
Application des Méthodes sans Maillage en Mécanique de la Rupture. Thèse de doctorat en sciences appliquées Université de Liège. 2004
- [9]A. Essakhi, A.Boulezhar, K. Elboussiri  
Validation of Kaniennen`s Rule for Fissured Co-Cr Pieces used for Adjoint Prosthesis and Calculation of their Critical Parameters. PCN Journal Maroc 2014
- [10] A.Essakhi, M. Ezzahmouly, A. Boulezhar, H. Zineb, A. Moutawakil,  
Determination of Quality Parameters of Nickel-Chrome Used in Parcel Denture with Numerical Methods'/ EasyChair Preprint № 7414/ February 2, 2022

**Prédiction simple de la rugosité de surface des engrenages droits taillés par une fraise de forme dans le cas d'un matériau isotrope.**  
**Simple prediction of the surface spur gears' roughness realized by a form milling cutter in the case of an isotropic material.**

N.EL AOUCATI<sup>1</sup>, H.MILOUKI<sup>1</sup>, A.EL AMRI<sup>1</sup>, A.CHOUAF<sup>1</sup>

1. Laboratoire de Mécanique, d'Ingénierie et d'Innovation, National School of Electricity and Mechanics of Casablanca, Hassan II University of Casablanca, Casablanca, Maroc.  
 noureddin.elaouchati@ensem.ac.ma

### Abstract

Gears are used in different industrial solutions for power transmission, especially those with particular requirements in terms of reliability and noise reduction. In the manufacturing process, surface roughness is an important parameter to improve friction performance and resist corrosion.

So mastering the machining process has become an issue for manufacturers [1].

The work carried out mainly based on algorithms and mathematical models like [2]

The main objective of this work is to present a fairly simple model to predict the surface roughness in the case of straight gear cutting by a modulus milling cutter and an isotropic material.

### Résumé

Les engrenages sont utilisés dans les différentes solutions industrielles pour la transmission de puissances, surtout celles qui ont des exigences particulières en termes de fiabilité et de réduction de bruit. Dans le processus de fabrication, la rugosité de surface est un paramètre important pour améliorer les performances de frottement et résister contre la corrosion. Par conséquent, la maîtrise du procédé d'usinage est devenue un enjeu pour les fabricants [1]. C'est dans ce sens que de nombreux travaux basés principalement sur des algorithmes et des modèles mathématiques, à titre d'exemple [2].

L'objectif principal de ce travail est de présenter un modèle assez simple pour prédire la rugosité de surface dans le cas de taillage par une fraise module, des engranges droits constitués d'un matériau isotrope.

**Mots clefs :** rugosité, fraisage, engrenage droit, optimisation, Tagushi

**Keywords :** roughness, milling, spur gear, optimization, Tagushi

### 1. Introduction

Dans la littérature plusieurs travaux ont étudié l'influence des paramètres d'usinage par fraisage sur la rugosité de surface. Les objectifs principaux sont la prédiction de la rugosité de surface et l'optimisation de ces paramètres. Parmi ces travaux, nous pouvons citer à titre d'exemple : l'Optimisation multi-objectifs des paramètres de processus de l'Al 6061-SiC p composite à matrice métallique dans l'approche de fraisage en bout-hybride GRA-PCA [3]. Dans cette étude, les paramètres d'entrés sont la vitesse de coupe, l'avance et la profondeur de coupe. Les réponses sont la rugosité de surface et la force de coupe. Une autre étude porte sur l'Optimisation du temps d'usinage et de la rugosité moyenne quadratique en fraisage à billes de l'alliage de titane Ti-6Al-4V - Champ aéronautique [4]. Ils ont considéré les mêmes paramètres d'entrés comme pour l'étude citée ci-dessus. En revanche, les réponses attendues sont la rugosité moyenne quadratique Rq et le temps d'usinage T. Une dernière étude, s'est intéressée à l'Analyse statistique des paramètres de fraisage END sur composite à matrice aluminium : une approche relationnelle gray [5]. Les paramètres considérés sont la vitesse de la broche, l'avance et la profondeur de coupe et les réponses visées sont : La rugosité de surface et le taux d'enlèvement de matière (MRR).

Dans l'ensemble de ces études, les méthodes adoptées demandent la réalisation de plusieurs expériences, ce qu'exige un investissement temporel important. C'est dans cet objectif que nous proposons une démarche qui permettra de trouver une formulation simple pour prédire une valeur approximative de la rugosité dans le cas de l'usinage des alliages isotropes par une fraise module.

### 2. Approche numérique

La majorité des travaux de recherche sont basés sur une approche numérique qui commence par l'élaboration d'un plan d'expérience. Alors, ils suivent la démarche ci-dessous [6]

1- Définir les réponses expérimentales à étudier

2- Choix des facteurs et du domaine expérimental

3- Proposition d'un modèle adapté à la situation





Cette démarche s'appuie sur une modélisation mathématique afin d'étudier une réponse  $y$  en fonction d'un certain nombre de facteurs.

La formulation la plus générale de la réponse aux facteurs est la suivante :  $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i)$

Le développement limité de Taylor-Mac Laurin, permet de prendre la forme d'un polynôme de degré plus ou moins élevé [7] :

$$y = a_0 + \sum a_i x_i + \sum a_{ij} x_i x_j + \sum a_{ii} x_i^2 + \dots \quad (1)$$

Où  $y$  est la réponse ou la grandeur d'intérêt,  $x_i, x_j$  représentent un niveau du facteur  $i, j$  ;  $a_0, a_i, a_{ij}, a_{ii}$  sont les coefficients du polynôme. Ce modèle est appelé le modèle a priori ou le modèle postulé.

Après l'élaboration du plan d'expérience, c'est l'étape de la mise en œuvre des expériences, elle consiste à varier les facteurs et de mesurer la réponse. Par exemple un plan à 3 facteurs, nécessite de réaliser 27 expériences.

A l'issue de cette étape, vient l'exploitation des résultats par des méthodes mathématiques et statistiques.

Enfin, c'est la validation de la solution par la mesure de l'écart entre la rugosité calculée et celle mesurée et d'établir l'intervalle d'incertitude.

Pour les modèles élaborés et validés par l'expérience, la rugosité de surface est souvent exprimée par une fonction polynomiale, à titre d'exemple [8]:

$$y = 0.203 + 0.273x_1 - 0.357x_2 + 0.208x_3 + 0.022x_4 \quad (2)$$

avec  $y$  est la rugosité de surface,  $x_1, x_2, x_3, x_4$  sont les paramètres d'usinages.

### 3. Fonction polynomiale de rugosité

Soit  $y$  la solution polynomiale de la rugosité de surface  $R_a$  et  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  sont les paramètres d'usinage. D'après [9] une des solutions mathématiques utilisées dans les travaux basés sur MSR est :

$$y = a_0 + a_1 V_c + a_2 f_z + a_3 a_p + a_{12} V_c x f_z + a_{13} V_c x a_p + a_{23} f_z x a_p$$

$y$  est la rugosité de surface  $R_a$   $a_0, a_1, a_2, a_3, a_{12}$  et  $a_{13}, a_{23}$ , sont les coefficients de régression à déterminer pour chaque réponse.

## 4. Perspective

### 4.1 Description

Certainement l'approche citée précédemment permet d'exprimer la rugosité avec une grande précision.

Cependant, elle nécessite un grand nombre des essais et un traitement numérique pour avoir un résultat.

Notre perspective est de pouvoir élaborer une formule de calcul simple pour prédire la rugosité de surface avec une précision acceptable

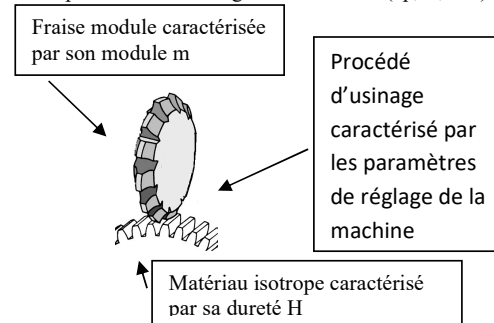
D'après P.G. Bernardos, G.-C. Vosniakos [8], qui ont réalisé le diagramme d'Ishikawa illustrant les paramètres influençant sur la rugosité de surface.

D'où les facteurs pour réaliser ce taillage :

- Fraise module (caractérisée principalement par le module  $m$ , on suppose que la rigidité de la fraise module est la même pour l'ensemble des fraises)

- Matière brute (dans la présente étude nous allons étudier uniquement les matériaux isotropes caractérisés par la dureté  $H$ )

- Les paramètres d'usinage de la machine ( $a_p, f_z, V_c$ )



D'après le model de régression

$$y = a_0 + a_1 V_c + a_2 f_z + a_3 a_p + a_{12} V_c x f_z + a_{13} V_c x a_p + a_{23} f_z x a_p$$

Avec  $y$  est la rugosité de surface  $R_a$  et  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_{12}$  et  $a_{13}, a_{23}$ , sont les coefficients de régression à déterminer pour chaque réponse.

Dans la perspective suivante, nous proposons de réaliser des expériences pour différents matériaux isotropes, afin de trouver la relation qui existe d'une part, entre la dureté et le module de la fraise de forme et d'autre part les coefficients de régression de la réponse.

Les travaux menés par Sener Karabulu, Halil Karakoç, Ramazan Çıtak [9] sur des alliages d'aluminium à base de Al6061 ont démontré l'existence d'une relation entre le changement des caractéristiques de la matière et la rugosité. Et par conséquent, entre sa dureté et la rugosité de surface.

### 4.2 Démarche

On prend un alliage caractérisé par sa dureté  $H$ , une fraise module caractérisée par son module  $m$ , on

applique l'ANOVA pour trouver l'équation de sa fonction polynomiale de rugosité

$$y = a_{01} + a_{11} V_c + a_{21} f_z + a_{31} a_p + a_{121} V_c f_z + a_{131} V_c a_p + a_{231} f_z a_p$$

Ensuite, on réalise l'ANOVA sur un plan d'expérience L2 ayant comme facteurs m et H. A chaque variation de m ou H, on retrouve la nouvelle fonction polynomiale y. Après, on peut déduire la fonction polynomiale  $f_1$  de a en fonction de m et de H.

On suit la même démarche pour trouver les fonctions polynomiales de  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_{12}$  et  $a_{13}$ ,  $a_{23}$ .

De ce fait, nous pouvons décrire les  $a_i$  en fonction de m et de H, respectivement le module de la fraise de forme et la dureté des matériaux.

Et en déduit :

$$y = a_0 + a_1 V_c + a_2 f_z + a_3 a_p + a_{12} V_c x f_z + a_{13} V_c x a_p + a_{23} f_z x a_p$$

$a_i$  est à calculer en fonction de m et de H

## 5. Conclusion

Ce modèle de prédiction permettra de trouver une valeur approximative attendue de la rugosité d'un engrenage taillé avec une fraise de forme dans le cas d'un matériau isotrope.

Il présente l'avantage d'être assez simple par rapport à l'approche numérique qui nécessite un grand nombre d'expériences.

Nous proposons dans la prochaine étape de réaliser le dispositif expérimental afin de trouver les coefficients  $a_i$  en fonction de m et de H et pour la validation de ce modèle.

## Références

- [1] Bouzid W., Zghal A., Saï L., *Optimisation de la rugosité des surfaces fraisées*, (2003) Revue de Mécanique Appliquée et Théorique.
- [2] A. ArunPremnath, T. Alwarsamy, T. Rajmohan, *Experimental Investigation and Optimization of Process Parameters in Milling of Hybrid Metal Matrix Composites*, Materials and Manufacturing Processes, Volume 27 (2012) pages 1035-1044
- [3] P. Umamaheswarrao, B. Ravi Sankar, T. Nancharaiah, *Multi objective optimization of process parameters of Al 6061-SiCp metal matrix composite in end milling-Hybrid GRA-PCA approach*, Materials Today: Proceedings (2020)
- [4] Wael Mersni, Mohamed Boujelbene, Sahbi Ben Salem, H.P. Singh, *Machining time and quadratic mean roughness optimization in ball end milling of titanium alloy Ti-6Al-4V – Aeronautic field*, Materials Today: Proceedings, (2020)
- [5] A. Joseph Arockiam, G.B. Sathishkumar, S.V. Alagarsamy, C. Chanakyan, A. Elmariung, P. Sethuraman, M. Meignanamoorthy, M. Ravichandran, *Statistical analysis of END milling parameters on aluminium matrix composite: A grey relational approach*, Materials Today: Proceedings, (2020)
- [6] W. Bouzid, A. Zghal et L. Saï, *Optimisation de la rugosité des surfaces fraisées*, Matériaux & Techniques (2003)
- [7] J. Goupy, L. Creighton, *INTRODUCTION AUX PLANS D'EXPÉRIENCES*, Dunod, 2005.
- [8] P.G. Benardos, G.-C. Vosniakos, *International Journal of Machine Tools & Manufacture* 43 (2003) 833–844
- [9] Sener Karabulut, Halil Karakoç, Ramazan Çitak, *Influence of B4C particle reinforcement on mechanical and machining properties of Al6061/B4C composites*, Composites Part B, (2016)

# Index des Auteurs-Tome I

<b>A</b>			
ABBADI M.	131	EL HARTI K.	29
ABDOUN F.	35	EL KAIBILLAH A.	87
ABOUHAZIM S.	125	EL KHALDI L.	41
ADDOU R.	115	EL KHAL C.	66
ADIMA S.	100	EL MASKAOUI Z.	48
AGBODJAN W. P.	115	EL MINOR H.	159
AIT ALI M. E.	128	EL MOUSTAPHAOUI A.	156
AIT EL FKI H. M.	72, 94, 122	EL MRIMAR O.	2
ALJINAIDI A. A.	109	ELGHORBA A.	147, 153
AOURIK O.	138	ELJANOUS S.	20
ASKOUR O.	63, 66, 150	ELJIHAD A.	125
AZOUANI A.	57	ELKORI R.	78, 135
AZRAR L.	8, 26, 35, 81, 109	ELMHAIA O.	150
<b>B</b>		EN-NAJI A.	141
BAHA M.	78	ESSAKHI A.	165
BAKHACH Z.	87	EWOLO NGAK F.P.	81
BALKISSOU H.	81	EZZAHMOULY M.	165
BELAASILIA Y.	38, 66, 150	<b>F</b>	
BELFALLAH K.	17	FADEL M.T.	84
BELLAHKIM M.	103	FAKRI N.	109
BEN SAID AMRANI N.	51, 75	<b>G</b>	
BENBOURAS Y.	103	GOGOBELE D.	112
BENDAOU O.	2	<b>H</b>	
BENMESSAOUD R .	119	HACHIM A.	69, 78, 106, 135, 144
BENNEBACH M.	162	HAIEK M.	75
BEZZAZI M.	5, 23	HAMDAOUI A.	66, 87
BOUAB W.	122	HANNAWI K.	115
BOUARAQUIA O.	45	HARRAT F. E.	144
BOUBEKER B.	97	HATERBOUCH M.	90
BOUKSOUR O.	125	HATIM Z.	165
BOUKTIB N.	122	HOUYOUK J.	8, 26
BOULEZHAR A.	165	<b>I</b>	
BOUNIF K.	131	IDIRI M.	94, 97
BOUNJOUR Y.	72	<b>J</b>	
BOUSSAOUI F.	14	JALAL S. E.	48
BOUSSHINE L.	60	JAMAL M.	17
<b>C</b>		JANANE ALLAH M.	38
CHARIF D'OUAZZANE S.	112	<b>K</b>	
CHOUAF A.	11, 48, 138, 156, 168	KADIRI I.	29
CHOUHA E.	48	KARAFI T.	97
<b>D</b>		KARIM SERROUKH H.	45
DAMIL N.	66, 87, 150	KHAMLICH I. A.	5, 23
DEPALE B.	162	KHARBAOUI Y.	63
DKIOUAK R.	32	KHATIB H.	54
<b>E</b>		KHELLOUKI A.	122
ECHAABI J.	100, 103	KIMAKH K.	103, 1536
EL ABBAS N.	5	KISSI B.	54
EL AMRI A.	168	KOTTAT A.	128
EL ANSARI Y.	75	<b>L</b>	
EL AOUCATI N.	168	LAHLOU M.	141
EL AROUSSI M.	84	LAHMAM H.	14, 57
EL BAJI O.	51	LAKHALY.	75
EL BHILAT H.	69, 106	LAMARTI A.	78
EL GHOULBZOURI A.	20	LKADI O.	125
EL HAD K.	69, 106, 135	<b>M</b>	
EL HADIM B.	159	MABCHOUR H.	106
EL HANKARI S.	32	MABSSOUT M.	45
		MAIMOUNI H.	54

MAJID F.	141	RGUIG M.	84
MALLIL E.	100	RHANIM R.	141
MALLIL EL.	103	RHIMINI H.	11
MANYO MANYO J. A.	8	ROKY K.	32
MAZIRI A.	100, 103	<b>S</b>	
MEKNASSI M.	153	SAADANE S.	84
MEUYOU H.H	26	SAADANI R.	29, 41
MILOUKI H.	168	SAADOUKI B.	138, 141
MOHRI F.	87	SAFFAH Z.	57
MORDANE S.	153	SALMI H.	69, 106
MOUCHTACHI A.	119	SANBI M.	29, 41
MOUHIB N.	141, 147	SARSRI D.	51, 75
MOURABIT M.	153	SEHAQUI R.	78
MOUTAWAKIL A.	165	<b>T</b>	
<b>N</b>		TAHIRI A.	97
NASRI K.	90	TAHIRI M.	23
NASSRAOUI M.	125	TASSI N.	109
NOUARI M.	131	TIMESLI A.	38, 57
NTAMACK G. E.	8, 26, 81, 112	TOUGUI T.	60
<b>O</b>		TRI A.	63
OTHMANI M.	138	<b>W</b>	
OUARDI A.	147	WAHID A.	153
OUZGAN A.	100	<b>Y</b>	
OUHIMMOU S.	78	YOUSOUFOU S.	26
OUZIZI A.	35	<b>Z</b>	
<b>P</b>		ZAINI M.	94
POTIER-FERRY M.	66	ZENASNI M.	90, 115
<b>R</b>		ZENASNI Z.	90, 115
RAHMOUNE M.	29, 41	ZITOUNI I.	11

Avec le soutien de:



Le Groupement  
d'Assurances  
du Supérieur

